Диференціальні рівняння і математична фізика

УДК 517.95+511.2

ЗАДАЧА З НЕЛОКАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ БЕЗТИПНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ З ВІДХИЛЕННЯМ АРГУМЕНТУ

Л. Й. Кондратів[1], М. М. Симотюк[1], І. Р. Тимків[2]
[1]Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України; 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б; e-mail: kondrativ@ukr.net, quaternion@ukr.net
[2]Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76018, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15; тел. +380 (342) 72-71-31; e-mail: tymkiv_if@ukr.net

Отримано умови існування єдиного розв'язку задачі з нелокальними умовами за виділеною змінною та умовами періодичності за іншою координатою для рівнянь із частинними похідними з відхиленням аргументу. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникли при побудові розв'язку задачі.

Ключові слова: *відхилення аргументу, нелокальні умови, малий знаменник, міра Лебега.*

1. Диференціальні рівняння з відхиленим аргументом (тобто рівняння, які пов'язують значення невідомої функції та її похідних при різних значеннях аргументу) виникають при математичному описі багатьох систем, коли враховується, що взаємодія між частинами системи відбувається не миттєво, а з деяким запізненням. Задачі для таких рівнянь виникають у торії ядерних реакторів, у теорії автоматичного керування, імунології, епідеміології, математичній економіці (див. [1, 2, 7, 9, 12]).

Нелокальні задачі для рівнянь із відхиленням аргументів [5, 6] є некоректними за Адамаром, як і нелокальні задачі для рівнянь без відхилень аргументів [3, 5, 11].

У працях [5, 6] за допомогою метричного підходу встановлено коректну розв'язність задач з нелокальними двоточковими умовами для безтипних систем першого порядку за часовою змінною з відхиленням аргументів за просторовими координатами. Доведено, що такі умови справджуються для майже всіх (стосовно міри Лебега) параметрів нелокальних умов. До цих робіт примикає праця [8] в котрій, отримано умови існування єдиного розв'язку задачі з інтегральною умовою для системи першого порядку з відхиленням аргументу за просторовою змінною для майже всіх значень параметра відхилень.

У даній роботі в шкалі просторів Соболєва встановлено коректну розв'язність нелокальної задачі для безтипних рівнянь із факторизованим оператором зі сталими коефіцієнтами з відхиленням аргументу. Доведено, що такі умови виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега) значень параметра відхилень.

Надалі використаємо такі позначення: Ω – коло радіуса 1, $D=\{(t,x): t\in(0,T),\ x\in\Omega\}$; H_q, $q\in R$, – простір, одержаний поповненням простору скінченних сум $\varphi(x)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\varphi_k e^{ikx}$, за нормою $\|\varphi;H_q\|=\sqrt{\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}|\varphi_k|^2(1+|k|)^{2q}}$, де $\varphi_k\in C$; $C^n([0,T];H_q)$, $n\in Z_+$, – простір функцій $u(t,x)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}u_k(t)e^{ikx}$, $u_k(t)\in C([0,T])$, таких, що для кожного фіксованого $t\in[0,T]$ похідні $\frac{\partial^s u(t,x)}{\partial t^s}:=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}u_k^{(s)}(t)e^{ikx}$, $s\in\{0,1,\dots,n\}$, належать до простору H_q і є неперервними за t в нормі цього простору

$$\|u;C^n([0,T];H_q)\|=\sum_{s=0}^{n}\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial^s u(t,\cdot)}{\partial t^s};H_q\right\|.$$

2. В області D розглянемо задачу

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t}-a_jT_h\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x)=0,\ h\in\Omega, \tag{1}$$

$$\mu\left.\frac{\partial^{r-1}u(t,x)}{\partial t^{r-1}}\right|_{t=0}-\left.\frac{\partial^{r-1}u(t,x)}{\partial t^{r-1}}\right|_{t=T}=\varphi_r(x),\quad r\in\{1,\dots,n\},\ x\in\Omega, \tag{2}$$

де $a_j=a_j^1+ia_j^2$, $a_j\neq 0$, $j\in\{1,\dots,n\}$, $a_j\neq a_q$, T_h – оператор зсуву аргументу $x\in\Omega$ на h, $\mu\in C\setminus\{0,1\}$.

Розв'язок задачі (1), (2) з простору $C^n([0,T];H_q)$, $q\in R$, шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}u_k(t)\,e^{ikx}. \tag{3}$$

Кожна з функцій $u_k(t)$, $k \in Z$, є розв'язком такої крайової задачі:

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{d}{dt} - a_j ik\, e^{ikh}\right) u_k(t) = 0, \tag{4}$$

$$\mu u_k^{(q-1)}(0) - u_k^{(q-1)}(T) = \varphi_{jk}, \quad q \in \{1,...,n\},, \tag{5}$$

де φ_{jk}, $k \in Z$, – коефіцієнти Фур'є функцій $\varphi_j(x)$.

Рівняння (4) має таку фундаментальну систему розв'язків

$$u_{kj}(t) = \exp\left(a_j ike^{ikh} t\right), \ j \in \{1,...,n\}, \ k \in \mathrm{Z} \setminus \{0\},$$

$$u_{kj}(t) = t^{j-1} / (j-1)!, \ j \in \{1,...,n\}, \ k = 0.$$

Тоді розв'язок рівняння (4) зображується формулою

$$u_k(t) = \sum_{j=1}^{n} c_{kj} \exp\left(a_j ike^{ikh} t\right), \ k \in \mathrm{Z} \setminus \{0\},$$

$$u_0(t) = \sum_{j=1}^{n} c_{0,j}\, t^{j-1} / (j-1)!.$$

Коефіцієнти $c_{kj}, j \in \{1,...,n\}$, визначаються із системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} c_{kj} \left(a_j ike^{ikh}\right)^{r-1} \left(\mu - \exp\left(a_j ike^{ikh} T\right)\right) = \varphi_{rk}, \quad r \in \{1,...,n\}, \ k \in \mathrm{Z} \setminus \{0\}, \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_{0j} \left(\mu u_0^{(q-1)}(0) - u_0^{(q-1)}(T)\right) = \varphi_{r0}, \quad r \in \{1,...,n\}.$$

Визначник системи (6) зображується формулою

$$\Delta(k) = (ik \exp(ikh))^{n(n-1)/2} \prod_{j=1}^{n} \left(\mu - \exp\left(a_j ike^{ikh} T\right)\right) \prod_{n \ge \alpha > \beta \ge 1} \left(a_\alpha - a_\beta\right), \ k \in \mathrm{Z} \setminus \{0\}, \tag{7}$$

$$\Delta(0) = (\mu - 1)^n.$$

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *в просторі* $C^n([0,T]; H_q)$, $q \in R$, *необхідно та досить, щоб виконувались умови*

$$\forall k \in Z \setminus \{0\} \qquad \mu - \exp\left(a_j ike^{ikh} T\right) \ne 0, \ j \in \{1,...,n\}. \tag{8}$$

Наслідок 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *в просторі* $C^n([0,T]; H_q)$ *необхідно та досить, щоб для кожного* $k \in Z \setminus \{0\}$ та кожного $j \in \{1,...,n\}$ *виконувалась хоча б одна нерівність*

$$\ln|\mu| \ne -kT(a_j^2 \cos kh + a_j^1 \sin kh),$$

$$\arg \mu \ne kT(a_j^1 \cos kh - a_j^2 \sin kh), \ j \in \{1,...,n\}.$$

Наведемо приклади задач вигляду (1), (2) для яких умови (8) виконуються, або порушуються

Приклад 1. В області D для рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u(t,x+2h)}{\partial x^2}=0,$$

розглянемо задачу з умовами

$$\mu\, u(0,x)-u(T,x)=\varphi_1(x),\qquad \mu\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\bigg|_{t=0}-\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\bigg|_{t=T}=\varphi_2(x). \tag{9}$$

Для цієї задачі $\Delta(k)=-2ke^{ikh}(\mu-\exp(kTe^{ikh}))(\mu-\exp(-kTe^{ikh}))$. Якщо належним чином вибрати показник відхилення h то умова (8) виконуються, якщо

$$\forall k\in Z\setminus\{0\},\quad \ln|\mu|\neq \pm kT\cos kh,\ \text{або}\ \arg\mu\neq\pm kT\sin kh.$$

Приклад 2. Розглянемо задачу з умовами (9) при $\mu=1$ для рівняння коливання струни

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u(t,x+2h)}{\partial x^2}=0$$

У цьому випадку $\Delta(k)=ke^{ikh}(2-2\cos(ke^{ikh}T))=4ke^{ikh}\sin^2(ke^{ikh}T/2)$,

і умова (8) виконуються тоді і тільки тоді $e^{ikh}\neq\dfrac{2m\pi}{kT}$, $m\in Z$.

3. Розглянемо питання про існування розв’язку задачі (1), (2). Нехай виконуються умови (8). Тоді для кожного $k\in Z$ існує єдиний розв’язок задачі (4), (5), який зображується формулою

$$u_k(t)=\sum_{r,j=1}^{n}\frac{(-1)^{n+j}S_{n-j}[a_r]\exp(a_r ike^{ikh}t)}{\left(\mu-\exp(a_r ike^{ikh}T)\right)(ike^{ikh})^{(j-1)}\prod\limits_{l=1,l\neq r}^{n}(a_r-a_l)}\varphi_{jk},\ k\in Z\setminus\{0\}, \tag{10}$$

$$u_0(t)=\sum_{r,j=1}^{n}\frac{\Delta_{rj}(0)t^{r-1}/(r-1)!}{\Delta(0)}\varphi_{j0},$$

$S_0[a_r]=1$, $S_l[a_r]$ – сума всеможливих добутків чисел $a_1,\ldots,a_{r-1},a_{r+1},\ldots,a_n$, взятих по l штук в кожному добутку, $\Delta_{rj}(0)$ алгебричне доповнення елемента r-го рядка та j-го стовпця у визначнику $\Delta(0)$.

Із формул (3), (10) отримуємо, що розв’язок задачі (1), (2) зображується формулою

$$u(t,x)=\sum_{k\in Z}\sum_{r,j=1}^{n}\frac{(-1)^{n+j}S_{n-j}[a_r]\exp(a_r ike^{ikh}t+ikx)}{\left(\mu-\exp(a_r ike^{ikh}T)\right)(ike^{ikh})^{(j-1)}\prod\limits_{l=1,l\neq r}^{n}(a_r-a_l)}\varphi_{jk}. \tag{11}$$

Збіжність ряду (11), взагалі кажучи, пов'язана із проблемою малих знаменників, оскільки вирази $\left|\mu - \exp(a_r ike^{ikh}T)\right|$, $r \in \{1,...,n\}$, будучи відмінним від нуля, можуть набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості значень $k \in Z \setminus \{0\}$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умова (9) і нехай існує $\gamma \in R$ таке, що для всіх (крім скінченної кількості) значень $k \in Z \setminus \{0\}$ справджуються нерівності*

$$\left|\mu - \exp\left(a_r ike^{ikh}T\right)\right| \geq \max\{e^{\ln|\mu|}; e^{-kT(a_r^2 \cos kh + a_r^1 \sin kh)}\}|k|^{-\gamma}, r \in \{1,...,n\}, \quad (12)$$

Якщо $\varphi_j \in H_{q+n+\gamma-j+1}$, $j \in \{1,...,n\}$, то існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) з простору $C^n\left([0,T]; H_q\right)$, $q \in R$. Цей розв'язок зображується формулою (11) і неперервно залежить від функцій φ_j, $j \in \{1,...,n\}$.

Доведення. Очевидно, що $\left|ike^{ikh}\right| = \sqrt{(-k \sin kh)^2 + (k \cos kh)^2} = |k|$. Для кожного $t \in [0,T]$ безпосередньо встановлюємо, що

$$\left|\frac{d^s}{dt^s} \exp\left(a_r ike^{ikh}t\right)\right| = \left|(a_r ike^{ikh})^s\right| \left|\exp\left(a_r ike^{ikh}t\right)\right| \leq$$

$$\leq c_1 (1 + |k|)^s \max\{1; e^{-kT(a_r^2 \cos kh + a_r^1 \sin kh)}\}, \ r \in \{1,...,n\}, \ s \in \{0,1,...,n\}. (13)$$

Із формули (11) на підставі оцінок (12), (13) отримуємо

$$\max_{t \in [0,T]} \left|\frac{d^s}{dt^s} u_k(t)\right| \leq c_2 \sum_{j=1}^{n} \left|\varphi_{jk}\right| (1 + |k|)^{s+\gamma-j+1}, \ s \in \{0,1,...,n\}, \ k \in Z .$$

Отже,

$$\left\|u; C^n([0,T]; H_q)\right\| = \sum_{s=0}^{n} \max_{t \in [0,T]} \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\frac{d^s u_k(t)}{dt^s}\right|^2 (1 + |k|)^{2q}} \leq$$

$$\leq c_3 \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\varphi_{jk}\right|^2 (1 + |k|)^{2(q+n+\gamma-j+1)}} \leq c_4 \sum_{j=1}^{n} \left\|\varphi_j; H_{q+n+\gamma-j+1}\right\|.$$

4. Для того, щоб з'ясувати питання, при яких умовах справджуються оцінки (12) сформулюємо допоміжне твердження.

Лема 1. *Нехай $f: I \to J$ – таке відображення інтервалу I на інтервал $J = f(I)$, що $|f'(x)| \geq \delta > 0$ для всіх $x \in I$. Тоді для довільної вимірної множини $E \subset I$*

$$mes E \leq \frac{1}{\delta} mes f(E).$$

Теорема 3. *Якщо $\gamma > 2$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега) чисел $h \in \Omega$ кожна з оцінок (12) виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) цілих чисел k.*

Доведення. Очевидно, що для довільного $z \in C$ виконується оцінка $\left|e^{z}-1\right| \geq \max\{1; e^{\operatorname{Re} z}\}\left|\sin(\operatorname{Im} z)\right|$. Звідси безпосередньо отримуємо, що

$$\left|\mu-\exp\left(a_r ike^{ikh}T\right)\right| = \left|e^{\ln|\mu|+i\varphi}-\exp\left(a_r ike^{ikh}T\right)\right| =$$

$$= \left|\exp\left(-\ln|\mu|-i\varphi+a_r ike^{ikh}T\right)-1\right| \geq \max\{e^{\ln|\mu|}; e^{-kT(a_r^2\cos kh+a_r^1\sin kh)}\} \times$$

$$\times \left|\sin(-\varphi+kT(a_r^1\cos kh-a_r^2\sin kh))\right|,\ r\in\{1,\ldots,n\},\text{ де } \varphi=\arg\mu .$$

Таким чином, для доведення теореми потрібно перевірити, що для майже всіх значень $h \in \Omega$ кожна з нерівностей

$$\left|\sin(\varphi+kT(a_r^1\cos kh-a_r^2\sin kh))\right| \geq (1+|k|)^{-\gamma},\ r\in\{1,\ldots,n\},$$

виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) цілих чисел k при $\gamma > 2$.

Згідно з лемою Бореля-Кантеллі [11, с. 13] для цього досить встановити, що при $\gamma > 2$ збігаються ряди $\sum_{k\in Z} S_{r,\gamma}(k)$, $r\in\{1,\ldots,n\}$, де

$$S_{r,\gamma}(k) = \left\{h\in\Omega : \left|\sin(\varphi+kT(a_r^1\cos kh-a_r^2\sin kh))\right| < (1+|k|)^{-\gamma}\right\}.$$

Очевидно, що $(a_r^1\cos kh-a_r^2\sin kh) = |a_r|\sin(kh+\varphi_1)$, де

$\sin\varphi_1 = a_r^1/|a_r|$. Звідси

$$mesS_{r,\gamma}(k) = \frac{1}{k} mes\left\{H\in(0,2\pi k) : \left|\sin(\varphi+kT|a_r|\sin(H+\varphi_1))\right| < (1+|k|)^{-\gamma}\right\} =$$

$$= \frac{1}{k} mes\left\{H\in(\varphi_1,\varphi_1+2\pi k) : \left|\sin\left(\varphi+kT|a_r|\sin(H+\varphi_1)\right)\right| < (1+|k|)^{-\gamma}\right\}.$$

Для заданого $\varepsilon=(\gamma-2)/2$ розіб'ємо відрізок $[\varphi_1,\varphi_1+2\pi k]$ на такі відрізки $I_q(k)$, $q\in\{1,\ldots,N_1(k)\}$, та відрізки $J_q(k)$, $q\in\{1,\ldots,N_2(k)\}$, щоб виконувались умови

$$\forall H\in I_q(k) \quad |\cos(H)| \geq \frac{1}{k^{\varepsilon+1}},\ q\in\{1,\ldots,N_1(k)\},$$

$$\forall H\in J_q(k) \quad |\cos(H)| \leq \frac{1}{k^{\varepsilon+1}}, \qquad q\in\{1,\ldots,N_2(k)\}.$$

Для кількостей $N_1(k)$, $N_2(k)$ цих відрізків, очевидно, справджуються оцінки $N_1(k)\leq C_5 k,\ N_2(k)\leq C_5 k$. Оскільки $mesJ_q(k)\leq C_6 k^{-\varepsilon-1}$, $q\in\{1,\ldots,N_2(k)\}$, то $mes\left(\bigcup_{q=1}^{N_2(k)} J_q(k)\right)\leq Ck^{-\varepsilon}$. Згідно з лемою 1 виконуються оцінки

$$mes\left\{H\in I_q : \left|\sin\left(\varphi+kT|a_r|\sin(H)\right)\right| < (1+|k|)^{-\gamma}\right\} \leq$$

$$\le k^{1+\varepsilon} mes\Big\{t \in \sin I_q : \big|\sin\big(\varphi + kT|a_r|t\big)\big| < (1+|k|)^{-\gamma}\Big\} \le$$

$$\le k^{1+\varepsilon} mes\Big\{t \in [-1,1] : \big|\sin\big(\varphi + kT|a_r|t\big)\big| < (1+|k|)^{-\gamma}\Big\}.$$

У роботі [10] встановлено, що

$$mes\Big\{t \in [-1,1] : \big|\sin\big(\varphi + kT|a_r|t\big)\big| < (1+|k|)^{-\gamma}\Big\} \le C_7 (1+|k|)^{-\gamma}.$$

Таким чином для $k > 0$ отримуємо

$$mes S_{r,\gamma}(k) \le C_8\, k^{-1} \sum_{q=1}^{N_1(k)} mes\Big\{H \in I_q : \big|\sin\big(\varphi + kT|a_q|\sin(H)\big)\big| < (1+|k|)^{-\gamma}\Big\} +$$

$$+ C_9\, k^{-1} \sum_{q=1}^{N_2(k)} mes J_q(k) \le C_{10} k^{1+\varepsilon-\gamma} + C_{11} k^{-1-\varepsilon} = C_{12} k^{-\frac{\gamma}{2}} + C_{11} k^{-1-\varepsilon} = C_{13} k^{-\frac{\gamma}{2}}.$$

Звідси при $\gamma > 2$ отримуємо збіжність рядів $\sum_{k \in Z} S_{r,\gamma}(k)$, $r \in \{1, \ldots, n\}$.

Із теорем 2, 3 випливає таке метричне твердження про коректну розв'язність задачі (1), (2).

Теорема 4. *Якщо* $\varphi_j \in H_{q+n-j+3+\theta}$, $j \in \{1,...,n\}$, $\theta > 0$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега) чисел* $h \in \Omega$, *існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) з простору* $C^n\big([0,T]; H_q\big)$. *Цей розв'язок зображується формулою (11) і неперервно залежить від функцій* φ_j, $j \in \{1,...,n\}$.

Література

1. Антоневич А.Б. Линейные функциональные уравнения. Операторный поход / А.Б. Антоневич. – Минск: Университетское, 1988. – 232 с.
2. Белан Е.П. О динамике бегущих волн в параболическом уравнении с преобразованием сдвига пространственной переменной / Е.П. Белан // Журн. мат. физики, анализа, геометрии. – 2005. –Т. **1**, № 1. – С. 3-34.
3. Власій О.Д. Задача з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами / О.Д. Власій // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 1. – С. 34-42.
4. Ільків В.С. Задачі з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників / В.С. Ільків, Б.Й. Пташник // Укр. мат. журн. – 2006. – Т 58, №12 – С. 1624-1650.
5. Ільків В.С. Розв'язність нелокальної задачі для системи рівнянь з частинними похідними зі зсувами аргументі / // Наук. вісник Ужгородського ун-ту. – 2010. – Вип.21 – С. 72-85.
6. Ільків В.С. Нелокальна задача з багатьма параметрами для системи рівнянь з частинними похідними зі зсувами аргументі / В.С. Ільків, Т.В. Магеровська // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Математика. – 2012. – Т. 2, № 2-3. – С. 73-80.

7. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со здвигами / Г.С. Литвинчук. – М.: Наука, 1977. – 448 с.
8. Медвідь О.М. Задача з інтегральними умовами для лінійної системи рівнянь із частинними похідними з відхиленням аргументу / О.М. Медвідь, М.М. Симотюк // Мат. вісник НТШ. – 2007. – Т.4 – С. 414-427.
9. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом / А.Д. Мышкис. – М.: Наука, 1972. – 352 с.
10. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними / Б.Й. Пташник, В.С. Ільків, І.Я. Кміть, В.М. Поліщук. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.
11. Спринжук В.Г. Метрическая теория диофантовых приближений / В.Г. Спринжук. – М.: Наука, 1977. – 143с.
12. Farkas G. Stability properties of positive solutions to partial differential equations with delay / G. Farkas, P.L. Simon // Electronic Journal of Differential Equation. – 2001. – № 64. – P. 1-8.

Стаття надійшла до редакційної колегії 25.06.2018 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., проф. ***Бігуном Я.Й.*** *(м. Чернівці),*
д.ф.-м.н., професором ***Ільківим В.С.*** *(м. Львів)*

PROBLEM WITH NONLOCAL CONDITIONS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS WITH DELAY

L. Yo. Kondrativ[1], M.M. Symotyuk[1], I. R. Tymkiv[2]
[1]Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine; 79060, Lviv, Naukova Str., 3-b;
e-mail:kondrativ@ukr.net, quaternion@ukr.net
[2]Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivs'k, Karpatska Str. 15,
ph: +380 (342) 72-71-31; e-mail: tymkiv_if@ukr.net

The correctness of a problem with nonlocal conditions for untyped partial differential equations with constant coefficients with delay in a cylindrical domain, which is a product of time segment by torus, is studied. The conditions of existens and uniqueness of the solution of the problem are established. The metric theorems of the estimation of small denominators of the problem are proved.

Key words: *nonlocal conditions, with delay, small denominators, Lebesque measure.*