
Механіка

УДК 539.4

DOI: 10.31471/2304-7399-2019-1(53)-59-71

БІФУРКАЦІЇ СТАЦІОНАРНИХ СТАНІВ МОДЕЛІ ДВОВІСНОГО ЕКІПАЖА

В. Г. Вербицький¹, А. І. Безверхий¹, І. В. Цідило², В. М. Сенчішак²¹Запорізький національний університет; м. Запоріжжя, пр. Соборний 226;
тел. +38(061) 227-12-31; email: oxsidan@ukr.net²Івано-Франківський національний технічний університет нафти і
газу; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
тел. +38(0342) 72-71-47; e-mail: mechtach@nung.edu.ua

Багато транспортних систем (автомобіль, літак, корабель) мають властивість симетрії. Для таких систем симетричні відхилення деякого керованого параметра (повороту керма) від нейтрального положення призводять до симетрії динамічної поведінки об'єкту (еквівалентність лівого і правого поворотів). Прямолінійному руху об'єкту з постійною швидкістю в цьому випадку відповідає тривіальний розв'язок відповідної динамічної системи (симетричний розв'язок). Умови небезпечної-безпечної втрати стійкості симетричного розв'язка (випадок одного нульового власного значення системи лінійного наближення) можуть бути отримані на основі аналізу дійсних біфуркацій народження-злиття стаціонарних станів зі стаціонарним станом, який відповідає симетричному розв'язку. Цей підхід дає можливість отримати умови небезпечної-безпечної втрати стійкості симетричного розв'язка, що еквівалентні умовам М.М. Баутіна [3], з мінімально можливими обчислювальними витратами. Запропонований підхід ілюструється на прикладі аналізу стійкості нелінійної моделі двовісного екіпажа з надлишковою повороткістю. Показано, що умова небезпечної-безпечної втрати стійкості прямолінійного руху (симетричного розв'язку) визначається співвідношенням між безрозмірними коефіцієнтами відведення на осях і коефіцієнтами зчеплення на осях екіпажа в поперечному напрямі. При цьому, коефіцієнти зчеплення не входять в лінеаризовану систему рівнянь збуреного руху, а відносяться до істотно нелінійної характеристики сил відведення.

Ключові слова: динамічна система, колісний екіпаж, стаціонарні стани, стійкість, дивергентні біфуркації.

1. Умови небезпечної-безпечної втрати стійкості симетричного розв'язка при дивергентній втраті стійкості

Поверхня стаціонарних станів в околі кратної особливої точки представляється узагальненою збіркою Уітні. Найпростішою її реалізацією для випадку симетричного розв'язка є збірка, де виникає трикратний стаціонарний режим.

В основі запропонованого підходу лежить геометрична інтерпретація умов стійкості у критичному випадку одного нульового кореня [7, 8].

Зупинимось детально на випадку системи з двома фазовими змінними, до якого зводиться задача у разі довільного числа змінних. Розглянемо систему двох диференціальних рівнянь на площині

$$dx/dt = f(x, v, \theta),$$

де $x \in R^2, v \in R_+, \theta \in R$, причому $f(-x, v, -\theta) = -f(x, v, \theta)$ при усіх $v \in R_+$. Якщо $f(x, v, \theta)$ – досить гладка функція відносно змінних стану x_1, x_2 , праві частини системи можуть бути розкладені в ряди Тейлора в околі початку координат

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 + bx_2 + a_{30}x_1^3 + a_{21}x_1^2x_2 + a_{12}x_1x_2^2 + a_{03}x_2^3 + \dots; \\ \dot{x}_2 &= cx_1 + dx_2 + b_{30}x_1^3 + b_{21}x_1^2x_2 + b_{12}x_1x_2^2 + b_{03}x_2^3 + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

При зміні параметра v (подовжньої швидкості руху), нульовий розв'язок, якому відповідає прямолінійний рух системи, втрачає стійкість – одне власне значення системи лінійного наближення проходить через нуль. Стаціонарним режимам системи (особливим точкам) відповідають точки перетину двох кривих, які визначаються правими частинами системи (1) $f_i(x_1, x_2) = 0$. Критичному значенню параметра $v=v^+$ відповідає нульовий корінь матриці лінійного наближення, тобто при критичному значенні параметра ці криві мають однакові кути нахилу дотичних у початку координат, а визначник матриці лінійних членів дорівнює нулю. Дійсно, розв'яжемо кожне з рівнянь $f_i(x_1, x_2)=0$ ($i=1,2$) в околі початку координат відносно, наприклад, змінної x_2

$$\begin{aligned} x_2 &= F_1(x_1) = F_1^{(1)}(0)x_1 + \frac{1}{3!}F_1^{(3)}(0)x_1^3 + \dots \\ x_2 &= F_2(x_1) = F_2^{(1)}(0)x_1 + \frac{1}{3!}F_2^{(3)}(0)x_1^3 + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Кутові коефіцієнти цих кривих у початку координат задаються співвідношеннями

$$\gamma_1 = F_1^{(1)}(0) = -\frac{a}{b}, \quad \gamma_2 = F_2^{(1)}(0) = -\frac{c}{d}.$$

Відносне положення кривих (2) при критичному значенні параметра $v=v^+$ визначають коефіцієнти при нелінійних членах ряду

$$(ad - bc = 0 \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2)$$

$$F_1^{(3)}(0) = \frac{6}{b^4}(-a_{30}b^3 + 3a_{21}ab^2 - 3a_{12}a^2b + a_{03}a^3),$$

$$F_2^{(3)}(0) = \frac{6}{d^4}(-b_{30}d^3 + 3b_{21}cd^2 - 3b_{12}c^2d + b_{03}c^3).$$

Збереження порядку слідування кривих (2) в докритичному і критичному положеннях відповідає безпечній втраті стійкості нульового розв'язка, порушення порядку слідування кривих – небезпечній втраті стійкості:

$$g^* = (\gamma_1 - \gamma_2)^{(-)} [F_1^{(3)}(0) - F_2^{(3)}(0)] > 0. \quad (3)$$

Дивергентна втрата стійкості стаціонарного стану пов'язана з реалізацією кратного стаціонарного режиму: в простому випадку зміни стійкості симетричного розв'язка реалізується трикратний режим. У початку координат або народжується пара стійких стаціонарних станів, що можливо при збереженні порядку слідування кривих (2), або в початок координат приходить пара нестійких стаціонарних станів, які зливаються із стійким стаціонарним станом – цей випадок реалізується при порушенні порядку слідування кривих (2).

У системі рівнянь, що визначає стаціонарні стани, залишимо члени не вищі за малі третього порядку

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + a_{30}x_1^3 + a_{21}x_1^2x_2 + a_{12}x_1x_2^2 + a_{03}x_2^3 &= 0, \\ cx_1 + dx_2 + b_{30}x_1^3 + b_{21}x_1^2x_2 + b_{12}x_1x_2^2 + b_{03}x_2^3 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Перейдемо від системи (4) до одного визначального рівняння, утримуючи лише члени малих до третього порядку. З першого рівняння системи (4) маємо

$$x_1 = -a/bx_2 + (-a_{30}b^3 + a_{03}a^3 - a_{12}a^2b + a_{21}ab^2)/b^4x_2^3 + \dots,$$

підставляючи цей розв'язок в друге рівняння системи (4), отримуємо «скорочене» визначальне рівняння

$$\gamma x^3 + \beta(v)x + \alpha(\theta) = 0, \quad (5)$$

Функція $\alpha(\theta)$ характеризує асиметрію системи при $\theta \neq 0$. Проекція критичної множини на площину параметрів (α, β) задає біфуркаційну множини (напівкубічну параболу). У кожній точці критичної множини (кратних точках поверхні рівноваги) якобіан системи (1) дорівнює нулю.

Значення коефіцієнтів рівняння (5) при критичному значенні параметра $v=v^+$, $\theta = 0$, $(d = cb/a)$,

$$\beta^+ = 0,$$

$$\gamma^+ = [b^3(ab_{30} - ca_{30}) + ab^2(ca_{21} - ab_{21}) + a^2b(ab_{12} - ca_{21}) + a^3(ca_{03} - ab_{03})]/ab^3.$$

З точністю до постійного множника коефіцієнт Ляпунова g_3 , що визначає стійкість нульового розв'язка системи (1) в критичному випадку одного нульового кореня, співпадає з коефіцієнтом γ^+ .

2. Аналіз біфуркацій стаціонарних станів велосипедної моделі двовісного екіпажу

Рівняння плоскопаралельного руху велосипедної моделі екіпажу (вертикальна подовжня площина, що проходить через середини колісних осей, є площиною геометричної симетрії) з постійною складовою швидкості v в поздовжньому напрямі мають вигляд

$$\begin{cases} m(\dot{u} + \omega v) = Y_1 \cos \theta + Y_2; \\ J\dot{\omega} = aY_1 \cos \theta - Y_2 b - M_1 - M_2; \\ \delta_1 = \theta - \arctg \frac{u + a\omega}{v}; \quad \delta_2 = \arctg \frac{-u + b\omega}{v}, \end{cases}$$

де m – маса кузова автомобіля; J – момент інерції автомобіля відносно вертикальної осі, що проходить через центр інерції; Y_1 і Y_2 – бічні сили, як функції кутів відведення δ_i , на передній і задній осях відповідно; M_1 і M_2 – моменти сил відведення на передній і задній осях відповідно.

Знаходження стаціонарних режимів руху велосипедної моделі автомобіля зводиться до розв'язання системи нелінійних рівнянь:

$$\begin{aligned} -\frac{v}{g}\omega + \frac{\cos(\theta)\bar{Y}_1(\delta_1)b}{l} + \frac{\bar{Y}_2(\delta_2)a}{l} &= 0, \\ \cos(\theta)\bar{Y}_1(\delta_1) - \bar{Y}_2(\delta_2) - \bar{M}_1 - \bar{M}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Тут $\bar{Y}_i(\delta_i) = Y_i(\delta_i)/N_i$ – безрозмірні зведені бічні реакції опорної площини на вісь (N_i – вертикальне навантаження на вісь).

$\bar{M}_i(\delta_i) = \frac{M_i(\delta_i) \cdot l}{m \cdot g \cdot a \cdot b}$ – безрозмірний момент, що виникає з боку опорної поверхні.

Нелінійний характер сил відведення може породжувати декілька стаціонарних режимів руху автомобіля при фіксованих керованих параметрах (v, θ). Найпростіший випадок реалізації цієї можливості представлений на рис.1 – поверхня стаціонарних станів є «збіркою». Переріз площиною $v = \text{const}$ цієї поверхні задає криву стаціонарних станів з характерними для збірки двома точками повороту, які є межами стійких і нестійких інтервалів на рівноважній кривій.

Злиття і народження, що реалізуються для цього випадку біфуркації, можуть бути подані в символічному вигляді

$$O^{2,0} + (O_1^{1,1}, O_2^{1,1}) \Rightarrow O^{1,1}; \quad O^{2,0} \Rightarrow O^{1,1} + (O_1^{2,0}, O_2^{2,0}).$$

Тут перша цифра верхнього індексу особливої точки дорівнює числу коренів характеристичного рівняння з від'ємними дійсними частинами, друга – з додатними. Тоді індекс Пуанкаре $j(O^{2,0})=1$, а $j(O^{1,1}) = -1$. Має місце «закон збереження» суми індексів Пуанкаре лівої і правої частин символічної рівності (до і після біфуркації).

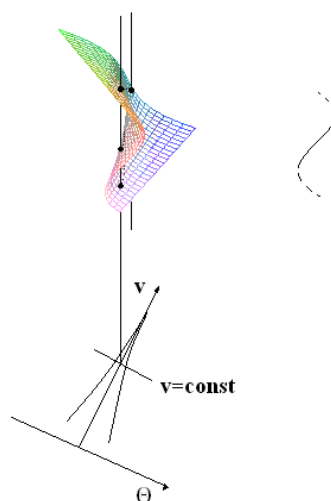


Рис. 1. Реалізація декількох стаціонарних станів моделі при фіксованих керуваних параметрах (v, θ)

Для кривої стаціонарних станів з точкою повороту біфуркації злиття і народження можуть бути подані в символічному вигляді (рис. 2)

$$(O_1^{2,0} + O_2^{1,1}) \Rightarrow \emptyset; \quad \emptyset \Rightarrow (O_1^{2,0} + O_2^{1,1}).$$

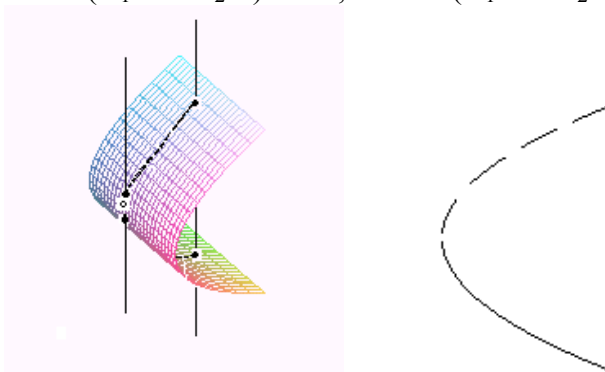


Рис. 2. Точка повороту на поверхні згортки (двократний стаціонарний режим)

Точці повороту (точці злиття або народження) відповідає двократний стаціонарний режим «сідло-вузол». Поява точок повороту для систем з одним керуючим параметром є випадком загального стану (стійким чином реалізується при малих структурних збуреннях системи). У цих точках, як відзначалося раніше, відбувається зміна стійкості гілки стаціонарних станів.

3. Геометричний метод знаходження стаціонарних режимів нелінійної моделі автомобіля

У разі моделі "ідеального" екіпажу, у якого поздовжня площина, що проходить через середини колісних осей, є площиною геометричної

і динамічної симетрії, знаходження особливих точок в околі прямолінійного руху зводиться до розв'язання системи (7) ($\cos\theta \approx 1$):

$$-\frac{V}{g}\omega + \frac{\bar{Y}_1(\delta_1)b}{l} + \frac{\bar{Y}_2(\delta_2)a}{l} = 0; \quad (7)$$

$$\bar{Y}_1(\delta_1) - \bar{Y}_2(\delta_2) = 0,$$

де $\bar{Y}_i(\delta_i) = Y_i(\delta_i) / N_i$ – безрозмірні зведені бічні реакції опорної площини (моментами сил відведення при аналітично-геометричному аналізі множини стаціонарних режимів нехтуємо); δ_i – зведені кути бічного відведення колісних осей.

Для кутів відведення δ_1 і δ_2 в досить малому околі початку координат можна користуватися виразами

$$\omega = \frac{V(\theta + \delta_2 - \delta_1)}{l}; \quad (8)$$

$$u = \frac{V}{l}(b\theta - b\delta_1 - a\delta_2).$$

Далі для спрощення вилучимо “риск” у виразах безрозмірних сил відведення та введемо нову функцію $Y = Y(\delta_2 - \delta_1)$, щоб виконувалась рівність

$$Y(\delta_2 - \delta_1) = Y_1(\delta_1) = Y_2(\delta_2) \quad (9)$$

(з другого рівняння (7) випливає, що в довільних стаціонарних режимах безрозмірні величини сил відведення на передній і задній осях співпадають, що і дає можливість побудувати функцію $Y = Y(\delta_2 - \delta_1)$).

Графічну ілюстрацію побудови функції $Y = Y(\delta_2 - \delta_1)$ подано на рис. 3.

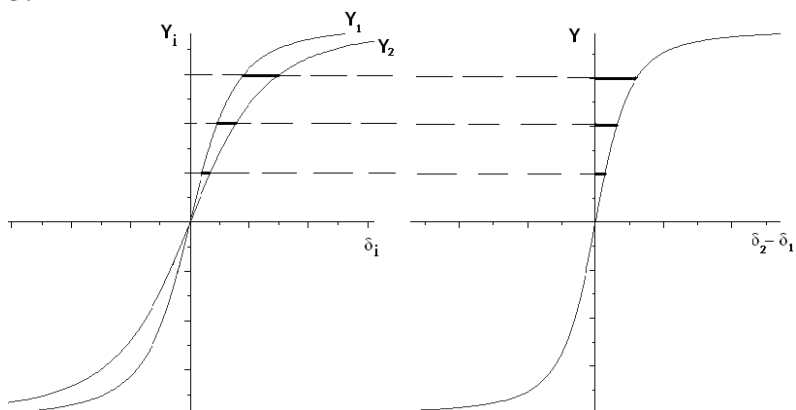


Рис. 3. Графічна ілюстрація побудови функції $Y = Y(\delta_2 - \delta_1)$

Тому величини Y_i в першому рівнянні системи (7) будуть представлені новою функцією $Y(\delta_2 - \delta_1)$, а враховуючи перше рівняння (8), отримаємо визначальне рівняння відносно однієї змінної $\delta_2 - \delta_1$:

$$-\frac{V^2(\theta + \delta_2 - \delta_1)}{gl} + Y(\delta_2 - \delta_1) = 0. \quad (10)$$

Це рівняння було отримане Я.М. Певзнером [4] і складає основу його «геометричного» методу аналізу можливих стаціонарних режимів руху нелінійної моделі автомобіля. Стаціонарним режимам відповідають точки перетину «нерухомої» кривої $Y(\delta_2 - \delta_1)$ і «рухомої» прямої

$$Y = \frac{V^2(\theta + \delta_2 - \delta_1)}{gl}, \quad (11)$$

положення якої залежить від параметрів керування (V, θ) : нахил пропорційний квадрату швидкості; параметр θ визначає зсув прямої (мал. 4).

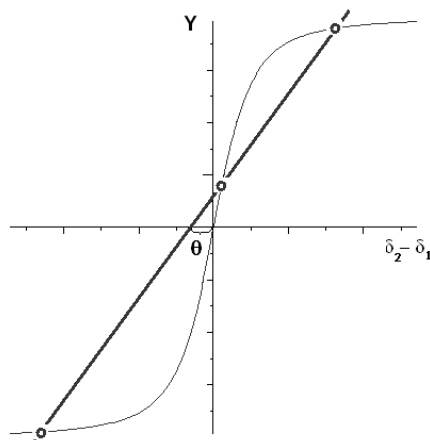


Рис. 4. «Геометричний» метод аналізу можливих стаціонарних режимів

Розглянемо два приклади з різним сценарієм реалізації трикратної особливої точки (трикратного стаціонарного режиму) на початку координат (рис. 5).

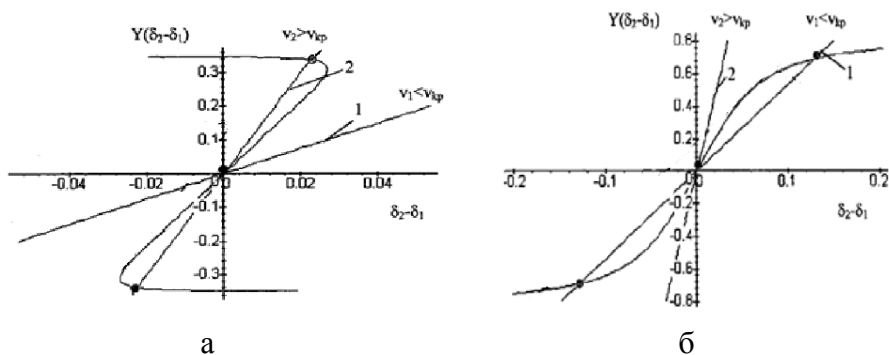


Рис. 5. Графічне відображення реалізації кратних стаціонарних режимів нелінійної моделі автомобіля

З аналізу лінеаризованої системи випливає, що прямолінійний рух втрачає стійкість при критичній швидкості V_{kp} : при $V_1 < V_{kp}$ прямолінійний рух стійкий (відповідна особлива точка на початку координат стійкий вузол); при $V_2 > V_{kp}$ відповідна особлива точка на початку координат сідлова (відбувається дивергентна втрата стійкості).

Розглянемо **біфуркацію злиття особливих точок**. Цьому випадку відповідає рис. 5 б. При $V_1 < V_{kp}$ початок координат має індекс 1, і існують дві рухомі особливі точки. При $V_1 = V_{kp}$ ці рухомі особливі точки зливаються в початку координат (реалізується трикратний стаціонарний режим). При $V_2 > V_{kp}$ маємо лише одну сідлову точку на початку координат (тому сума індексів усіх особливих точок при $V_1 < V_{kp}$ дорівнює -1), отже, рухомі точки мали бути сідловими. Відповідний фазовий портрет представлений на рис. 6, б.

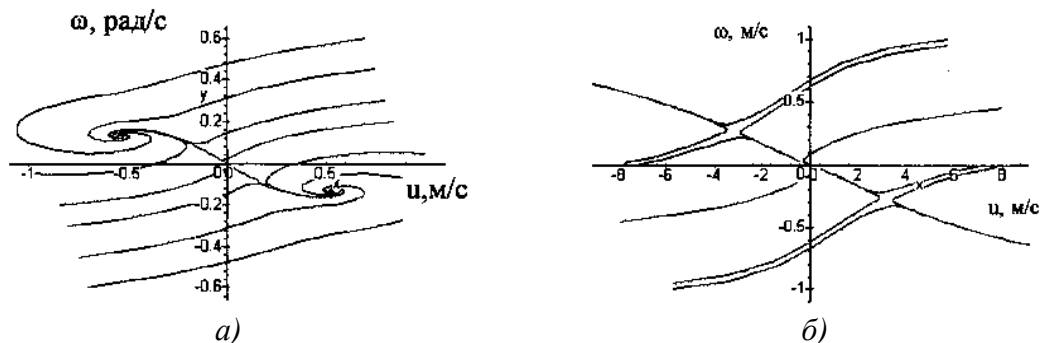


Рис. 6. Фазові портрети

Біфуркація народження особливих точок. Цьому випадку відповідає рис. 5, а.

Для моделі з надлишковою поворотністю в околі прямолінійного режиму руху при $V_2 > V_{kp}$ (сідлової особливої точки з індексом - 1) з'явилася пара стаціонарних режимів (ці рухомі особливі точки мають індекс 1), оскільки сума усіх особливих точок при $V_2 > V_{kp}$ має дорівнювати 1 (такий індекс мала єдина особлива точка в початку координат при $V_1 < V_{kp}$). Відповідний фазовий портрет представлено на рис. 6, а.

Тобто зміні стійкості прямолінійного руху відповідає або народження двох стійких кругових режимів із стійкого прямолінійного режиму (при цьому прямолінійний режим втрачає стійкість), або злиття двох нестійких кругових режимів із стійким прямолінійним режимом, внаслідок чого прямолінійний режим втрачає стійкість. Народженню особливих точок відповідає опуклість функції $Y = Y(\delta_2 - \delta_1)$ в околі нуля, а злиттю – увігнутість [8]. Малим змінам параметра θ (кута повороту керованих коліс) можуть відповідати кінцеві стрибки на поверхні стаціонарних режимів – "катастрофи" стаціонарних станів. Геометричним місцем точок в площині параметрів, яким відповідають ці катаст-

рофічні зміни, (біфуркаційна множина) є напівкубічна парабола з точкою загострення (каспом), яка відповідає трикратному стаціонарному режиму. Її аналітичне представлення розглядається нижче. Сама поверхня рівноважних станів (поверхня катастрофи) в околі точки ($V = V_{kp}$, $\theta=0$) має особливість "збірки".

4. Аналітичний метод визначення меж стійкості множини кругових стаціонарних режимів нелінійної моделі автомобіля

Якісні зміни на поверхні стаціонарних станів пов'язані з появою-злиттям пари особливих точок (особливість "згортки"), або в загальному випадку з народженням-злиттям k -кратної особливої точки (узагальнена "збірка" Уїтні). Загальні положення теорії катастроф (прикладна теорія особливостей гладких відображень) зумовлюють стратегію аналізу особливостей поверхні стаціонарних станів – ідентифікацію особливостей максимального рангу (список особливостей Р. Тома, доповнений В.І. Арнольдом) і побудову відповідних біфуркаційних множин, що розбивають простір параметрів на області з різним числом стаціонарних станів.

Однією з проблем на шляху реалізації цієї програми є перехід до рівняння з однією фазовою змінною, яка задає усю множину стаціонарних станів системи (передбачається можливість аналітичного представлення визначального рівняння). Відсутність такого аналітичного представлення для рівняння Я. М. Певзнера (10), мабуть, було основною перешкодою для подальшого аналізу нелінійної моделі екіпажа з позицій теорії біфуркацій і прикладної теорії катастроф.

Першим кроком на шляху аналітичного представлення залежності $Y(\delta_2 - \delta_1)$ буде перехід до функцій $\delta_2 = G_2(Y)$ і $\delta_1 = G_1(Y)$, які є оберненими до початкових функцій $Y_1 = Y_1(\delta_1)$ і $Y_2 = Y_2(\delta_2)$. У разі, коли нелінійні сили відведення представлені у вигляді ірраціональної залежності

$$\bar{Y}_i = \frac{\bar{k}_i \delta_i}{\sqrt{1 + \left(\frac{\bar{k}_i \delta_i}{\kappa_i}\right)^2}},$$

відповідні їм обернені залежності мають вигляд

$$\delta_i = \frac{\bar{Y}_i}{\bar{k}_i \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{Y}_i}{\kappa_i}\right)^2}}; G_i = \frac{\bar{a}_y}{\bar{k}_i \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{a}_y}{\kappa_i}\right)^2}}. \quad (12)$$

Графіки нелінійних залежностей сил відведення і відповідні їм обернені залежності подано на рис. 7 (а, б).

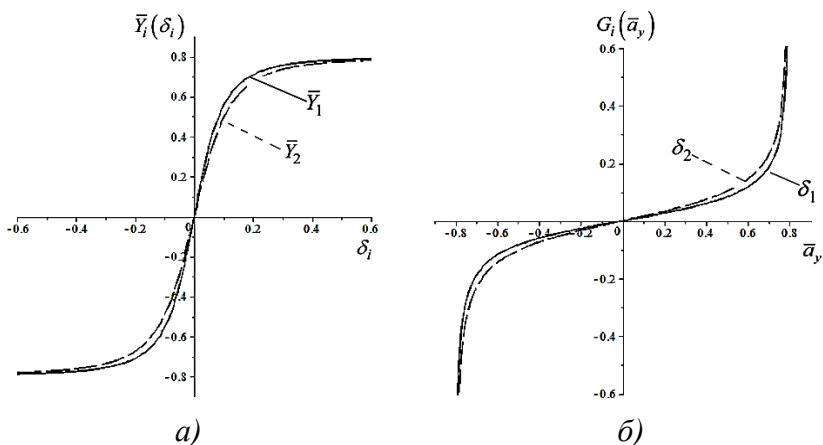


Рис. 7. Графіки нелінійних залежностей сил відведення (а) і відповідних їм обернених залежностей (б)

Далі можна отримати функцію $(\delta_2 - \delta_1) = G(Y)$, яка є оберненою до функції $Y = Y(\delta_2 - \delta_1)$, як різницю двох функцій $\delta_2 = G_2(Y)$ і $\delta_1 = G_1(Y)$ (рис. 7, б) та перейти від рівняння (10) до наступного визначального рівняння:

$$\frac{gl}{V^2} Y - \theta = G(Y), \quad (13)$$

де функція $G(Y) = (\delta_2 - \delta_1)$ описана вище.

Для рівняння (13), що визначає множину стаціонарних станів моделі екіпажа, умови реалізації кратних стаціонарних станів («рухома» пряма, яка представлена лівою частиною рівняння (13), дотична до «нерухомої» кривої $G(Y)$) приводять до наступного параметричного рівняння, яке задає критичну множину параметрів керування (V, θ)

$$gl/v^2 = d(G)/d(Y); \quad \theta + G = Y d(G)/d(Y); \quad Y = -0.8 - 0.8$$

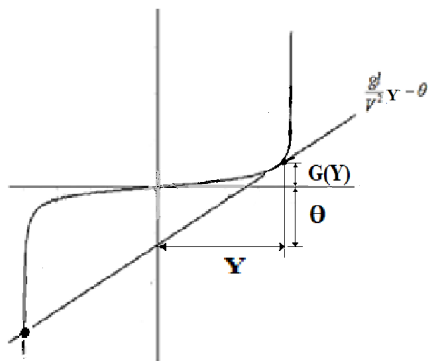


Рис. 8. Визначення умов існування кратних стаціонарних режимів руху

5. Вплив коефіцієнтів зчеплення коліс на характер втрати стійкості прямолінійного режиму руху

Покажемо, що коефіцієнти зчеплення на передній і задній осях автомобіля впливають на безпеку втрати стійкості прямолінійного руху ідеальної моделі автомобіля. Рис. 9 ілюструє вплив на біфуркаційну множину визначального параметра ($\kappa_1 = 0,75$, рис. 9, а; $\kappa_1 = 0,65$, мал. 9, б): при зменшенні κ_1 ($\kappa_1^0 = \kappa_2^0 = 0,8$) у біфуркаційній множині з'являються додаткові «каспи», які при критичному значенні параметра $\kappa_1 = \kappa_1^*$ зливаються з симетричним розв'язком, змінюючи небезпечний характер втрати стійкості прямолінійного руху на безпечний (при $\kappa_1 < \kappa_1^*$; $\kappa_1^* = \kappa_2^0 (\bar{k}_2 / \bar{k}_1)^{1/2}$ має місце безпечна втрата стійкості прямолінійного руху).

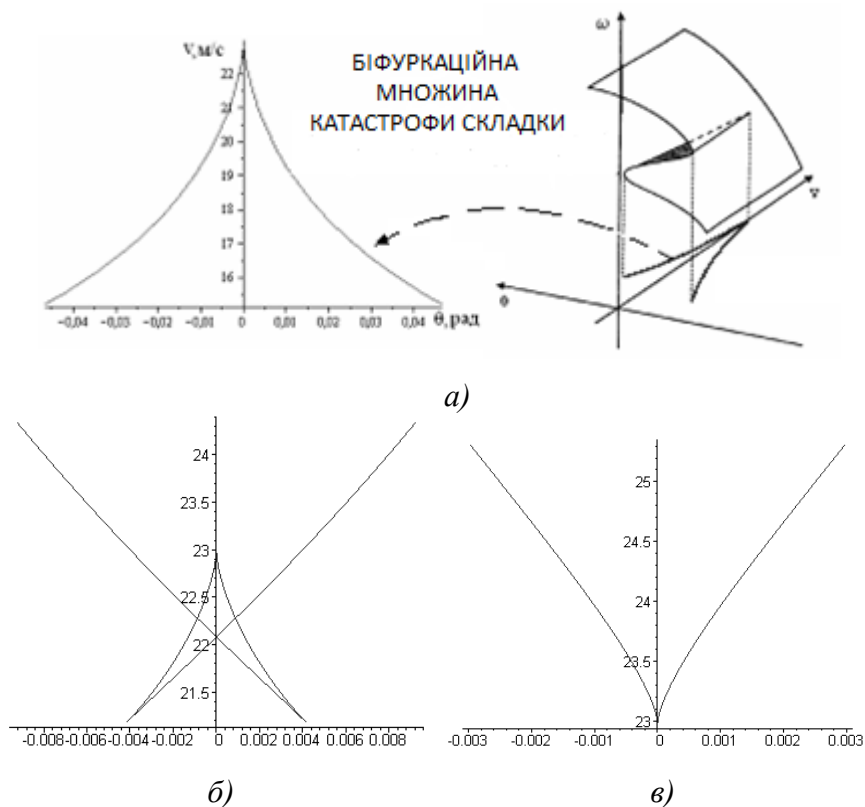


Рис. 9. Зміна конфігурації біфуркаційної множини при зменшенні κ_1

Визначимо умови безпечної втрати стійкості прямолінійного режиму руху в аналітичному виді. Оскільки в нашому розпорядженні є визначальне рівняння (13), розглянемо його наближене подання з точністю до малих третього порядку, враховуючи конкретний вид нелінійних залежностей сил відведення (12)

$$\frac{g \cdot l}{v^2} \cdot Y - \theta = \left(\frac{1}{\bar{k}_2} - \frac{1}{\bar{k}_1} \right) \cdot Y + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\bar{k}_2} \cdot \frac{1}{\kappa_2^2} - \frac{1}{\bar{k}_1} \cdot \frac{1}{\kappa_1^2} \right) \cdot Y^3,$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\bar{k}_2} \cdot \frac{1}{\kappa_2^2} - \frac{1}{\bar{k}_1} \cdot \frac{1}{\kappa_1^2} \right) \cdot Y^3 + \left(\frac{1}{\bar{k}_2} - \frac{1}{\bar{k}_1} - \frac{g \cdot l}{v^2} \right) \cdot Y + \theta = 0,$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\bar{k}_2} \cdot \frac{1}{\kappa_2^2} - \frac{1}{\bar{k}_1} \cdot \frac{1}{\kappa_1^2} \right) \cdot Y^3 + \left(\frac{1}{\bar{k}_2} - \frac{1}{\bar{k}_1} \right) \cdot \left(1 - \frac{v_{kp}^2}{v^2} \right) \cdot Y + \theta = 0.$$

Умови безпечної втрати стійкості:

$\theta = 0, v < v_{kp} \Rightarrow$ один стаціонарний режим;

$\theta = 0, v > v_{kp} \Rightarrow$ три стаціонарні режими.

Отже, при виконанні умов

$$\bar{k}_1 > \bar{k}_2;$$

$$\bar{k}_2 \cdot \kappa_2^2 > \bar{k}_1 \cdot \kappa_1^2,$$

має місце безпечна втрата стійкості прямолінійного режиму руху, яка прийнятніша з точки зору можливих коригуючих дій водія. У разі відсутності коригуючих дій з боку водія екіпаж буде прагнути рухатись круговою траєкторією досить великого радіусу.

Література

1. Андронов А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкен. – М.: Физматгиз, 1950. – 916 с.
2. Арнольд В.И. Теория катастроф / В.И. Арнольд. – М: Наука, 1990. – 128 с.
3. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости / Н.Н. Баутин – М.: Наука, 1984. – 176 с.
4. Певзнер Я.М. Теория устойчивости автомобиля / Я.М. Певзнер – М: Машиздат, 1947. – 156 с.
5. Gillespie, Thomas D. Fundamentals of Vehicle Dynamics, Society of Automotive Engineers, Inc. 1992. – 470 p.
6. Pacejka H.B., 1978. Tyre factors and vehicle handling // Delf Univ. Technol. – №108.–31 p.
7. Verbitskii V.G., Lobas L.G., 1981. Method of determination of the special points and their character // Applied mathematics and mechanics. – 45(5). – P. 944 – 948.
8. Verbitskii V.G., Lobas L.G., 1994. Bifurcations of steady states in systems with rolling under constant force perturbations // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 58(5). – P. 933 – 939.

Стаття надійшла до редакційної колегії 20.08.2019 р.

*Рекомендовано до друку д.т.н., професором Лисканичем М.В.,
д.ф.-м.н., професором Сулимом Г.Т. (м. Львів)*

**BIFURCATIONS OF STEADY STATES
OF THE BIAxIAL CREW MODEL****V. G. Verbytsky¹, A. I. Bezverkhy¹, I. V. Tsidylo², V. M. Senchishak²**¹Zaporizhzhya National University; 226, Soborniy avenue, Zaporizhzhia;ph. +380 (61) 227-12-31; email: oxsidan@ukr.net²Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas;

15, str. Carpatska, Ivano-Frankivsk, 76019;

ph. +38(0342) 72-71-47; e-mail: mechmach@nung.edu.ua

Many transport systems (car, airplane, ship) have symmetry property. For such systems symmetrical deviations of some control parameter (steering wheel) from the neutral position lead to symmetry of the dynamic behaviour of the object (equivalence of left and right turns). In this case the straight-line motion of an object with constant velocity corresponds to a trivial solution of the corresponding dynamic system (symmetric solution). Conditions for dangerous-safe loss of symmetric junction stability (the case of one zero proper linear approximation system) can be obtained from the analysis of the true birth-fusion of stationary states with a stationary state corresponding to a symmetric solution. This approach makes it possible to obtain conditions of dangerous and safe loss of symmetric junction stability equivalent to the conditions of MM. Bautin [3] with the lowest possible computational cost. The proposed approach is illustrated by the example of the stability analysis of a nonlinear model of a double-axle crew with excessive rotation. It is shown that the condition of hazardous and safe loss of stability of straight-line motion (symmetric junction) is determined by the ratio between dimensionless coefficients of axle deflection and coupling coefficients on transaxle axes. However, clutch coefficients are not included in the linear system of equations of perturbed motion but refer to a substantially nonlinear characteristic of the forces of withdrawal.

Key words: dynamic system, wheel crew, stationary states, stability, divergent of bifurcations.