

# *Математичне моделювання та обчислювальні методи*

УДК 62-97; 519.876.5

DOI: 10.31471/2304-7399-2019-1(53)-38-44

## **МОДЕЛЮВАННЯ ДЕФОРМУВАННЯ ОБ'ЄКТІВ, ЩО ПРАЦЮЮТЬ В УМОВАХ ТЕМПЕРАТУРНИХ ВПЛИВІВ**

**Г. В. Григорчук, А. П. Олійник, Л. І. Григорчук, В. В. Рис**

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;  
76018, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;  
e-mail: math@nung.edu.ua*

*Пропонується математична модель процесу деформування та напруженого стану довгомірних обертових об'єктів складної геометричної конфігурації. Запропонована модель процесу деформування ділянок, які є комбінаціями секцій циліндричної, тороподібної та конічної форми, побудовано параметричне подання закону руху вказаних ділянок в початковий та контрольний моменти часу, на основі якого визначено компоненти векторів локальних базисів та компоненти метричного тензора для вказаних типів ділянок, на основі чого розраховано компоненти тензора деформацій. При цьому використано апарат теорії систем лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення геометричних характеристик деформованої тороподібної ділянки, а також апарат інтерполяційних многочленів Ерміта для моделювання процесу деформування осей. В рамках лінійної теорії пружності проведено розрахунок компонентів тензора напружень, що виникають при неізотермічних процесах, характерних при експлуатації технологічних об'єктів цукрової промисловості. Проведено уточнений розрахунок компонент тензора напружень, який дозволяє врахувати особливості деформованого об'єкта за різних температур середовищ. Запропоновано модель напруженого стану об'єктів, проведено тестові розрахунки для модельних ділянок, виявлено напрями подальших досліджень.*

**Ключові слова:** *тензор напружень, геометрична конфігурація, прямолінійна циліндрична геометрична модель, тороподібна геометрична модель, деформація об'єкта.*

**Вступ.** На підприємствах цукрової промисловості значного поширення набули технологічні об'єкти, які з геометричної точки зору є комбінаціями конічних, прямолінійних циліндричних та тороподібних елементів. Схему такого об'єкта подано на рис. 1.

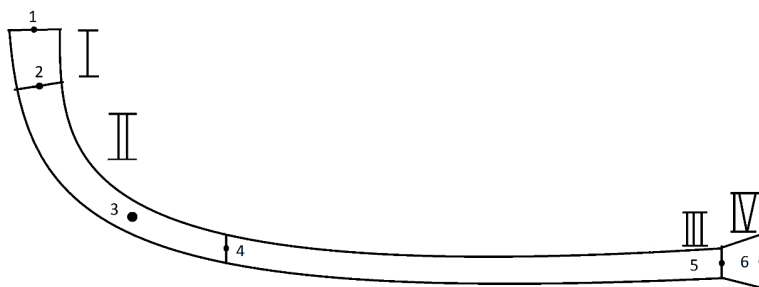


Рис. 1. Геометрична конфігурація технологічного об'єкта цукрової промисловості

Характерними особливостями функціонування такого об'єкта який назвемо технологічним об'єктом цукрової промисловості (ТОЦП) є наступні фактори:

- дія високих температур;
- широкий діапазон тисків;
- вібрація діючого обладнання;
- спряження з іншими технологічними об'єктами.

Математичним апаратом для опису зміни напруженого стану вказаного об'єкта виберемо підхід, який базується на результатах [1], основною ідеєю якого є побудова моделі напруженого деформування стану (НДС) об'єкта на основі даних про його просторову конфігурацію в два моменту часу початковий та контрольований. За початкове положення обирається геометрична конфігурація ТОЦП, відома з практичних документів: довжини кожного із секторів (на рис. 1: I та III – прямолінійні, циліндричні, II- тороподібний; IV- конічний елемент). За контрольне положення приймемо математичну параметризацію об'єкта, одержану на основі оцінки його переміщень експериментальними методами в точках, зображених на рис. 1.

**Основна частина.** В початковий момент геометрія об'єкта описується наступним чином:

- для прямолінійних ділянок I та III:

$$\begin{cases} x = s, & s \in [s_0^i; s_1^i], i = 1,3; \\ y = r \cos\varphi, & \varphi \in [0; 2\pi]; \\ y = r \sin\varphi, & r \in [R_0^i; R_1^i]; \end{cases} \quad (1)$$

тут  $[s_0^i; s_1^i]$  характеризують довжину ділянок I та III;  $[R_0^i; R_1^i]$  внутрішній та зовнішній радіуси цих ділянок;

-для тороподібного фрагменту II використовується тороїдальна система координат:

$$\begin{cases} x = (R_0^k + r \cos \varphi) \cos \theta, & \varphi \in (0; 2\pi]; \\ y = (R_0^k + r \cos \varphi) \sin \theta, & r \in [R_0; R_1]; \\ z = r \sin \varphi, & \theta \in [\varphi_1; \varphi_2]; \end{cases} \quad (2)$$

де  $R_0^k$  – початковий радіус кривини тороподібної ділянки;  $\varphi_1; \varphi_2$  – кути, які визначають початкову та кінцеву точки тороподібного фрагменту ( $\varphi_{1=0}; \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ );  $R_0; R_1$  – внутрішній та зовнішній радіуси труби;

- конічна ділянка описується наступним чином:

$$\begin{cases} x = s, & s \in [s_0^1; s_1^1]; \\ y = \rho(s; r) \cos \varphi, & \varphi \in [0; 2\pi]; \\ z = \rho(s; r) \sin \varphi, & r \in [R_B^k; R_3^k]; \end{cases} \quad (3)$$

де  $[s_0^1; s_1^1]$  – довжина осі конічної ділянки,  $[R_B^k; R_3^k]$  – внутрішній та зовнішній радіуси конічної ділянки,

$$\rho(s; r) = \frac{R_B^1 - R_m^1}{s_1^1 - s_0^1} s + \frac{s_m^1 s_1^1 - R_m^1 s_0^1}{s_1^1 - s_0^1} + r, \quad (4)$$

де  $r \in [0; \delta]$ ,  $\delta$  – товщина стінки;  $R_B^1; R_m^1$  – внутрішній радіус початкової та кінцевої точки конічного фрагменту трубопроводу. Формули (1)-(4) повністю визначають поверхню ТОЦП в початковий момент часу.

Параметризація точок проводиться на основі виміряних в точках 1-6 переміщень за наступним алгоритмом:

- спочатку за координатами точок 2 і 3 та 4 –  $(x_2, y_2); (x_3, y_3); (x_4, y_4)$  визначаємо новий радіус кривини та значеннями кутів  $\varphi_1; \varphi_2$  для деформованої тороїдальної ділянки з системи:

$$\begin{cases} (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 = R^2, \\ (x_3 - x_0)^2 + (y_3 - y_0)^2 = R^2, \\ (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = R^2. \end{cases} \quad (5)$$

Звідки

$$\Delta x_0 = \begin{vmatrix} y_3^2 - y_2^2 + x_3^2 - x_2^2 & -2(y_2 - y_3) \\ y_4^2 - y_3^2 + x_4^2 - x_3^2 & -2(y_3 - y_4) \end{vmatrix},$$

$$\Delta y_0 = \begin{vmatrix} 2(x_2 - x_3) & y_3^2 - y_2^2 + x_3^2 - x_2^2 \\ -2(x_3 - x_4) & y_4^2 - y_3^2 + x_4^2 - x_3^2 \end{vmatrix}$$

$$\text{і } \Delta = \begin{vmatrix} -2(x_2 - x_3) & -2(y_2 - y_3) \\ -2(x_3 - x_4) & -2(y_3 - y_4) \end{vmatrix}.$$

Тоді

$$x_0 = \frac{\Delta x_0}{\Delta}, \quad (6)$$

$$y_0 = \frac{\Delta y_0}{\Delta}. \quad (7)$$

Радіус кривини визначається з рівняння

$$R^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2, \quad (8)$$

де  $x_0, y_0$  визначені за (6), (7), а  $(x_i; y_i)$  – будь-яка з точок 2;3 або 4. Нове значення  $\varphi'_1; \varphi'_2$  визначаються наступним чином  $\varphi'_1$  вважається рівним 0, а  $\varphi'_2$  визначається як кут між векторами  $\overrightarrow{x_4 x_0}$  та  $\overrightarrow{\text{та} x_2 x_0}$ :

$$\cos \varphi'_2 = \frac{(x_4 - x_0)(x_2 - x_0) + (y_4 - y_0)(y_2 - y_0)}{\sqrt{(x_4 + x_0)^2 (y_4 - y_0)^2} \sqrt{(x_2 - x_0)^2 (y_2 - y_0)^2}}. \quad (9)$$

Деформована вісь ділянки I визначається як многочлен Ерміта, побудований за умовами

$$\begin{cases} H_1(x_1) = y_1, \\ H_1(x_2) = y_2, \end{cases} H_1^1(x_2) = \frac{x_0 - x_2}{\sqrt{R^2 - (x_2 - x_0)^2}}; \quad (10)$$

а деформована вісь ділянок III та IV визначається як многочлен Ерміта  $H_2(x)$ , побудований за умовами:

$$\begin{cases} H_2(x_4) = y_4, \\ H_2(x_6) = y_6, \end{cases} H_2(x_4) = \frac{x_0 - x_4}{\sqrt{R^2 - (x_4 - x_0)^2}}, \quad (11)$$

Техніка побудови многочлена Ерміта є відомою [2]. Таким чином, в контрольний момент часу залежності (1)-(3) набувають наступного вигляду:

- для прямолінійних ділянок

$$\vec{r}_i = \begin{cases} x = S + (\alpha_n(s) \sin \varphi + \alpha_b(s) \cos \varphi) \rho(s; \varphi; r), \\ y = H_i(s) + (\beta_n(s) \cos \varphi + \beta_b(s) \sin \varphi) \rho(s; \varphi; r), \\ z = (\gamma_n(s) \sin \varphi + \gamma_b(s) \cos \varphi) \rho(s; \varphi; r); \end{cases} \quad (12)$$

де  $i = 1, 3$  – номери прямолінійних ділянок;  $\vec{r} = (s; H(s); 0)$  – параметризація деформованої осі;  $(\alpha_4, \beta_4, \gamma_4); (\alpha_6, \beta_6, \gamma_6)$  – компоненти векторів нормалі та бінормалі до деформованої осі. Якщо  $\vec{r} = (s; H(s); 0)$ , де  $H_i(s)$  – побудований за умови (10); (11) многочлени Ерміта, то  $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$  – одиничні вектори, що відповідають вектору з координатами

$$\vec{n} = \left\{ -\frac{H_i''(s)H_i'(s)}{(1+H_i'(s)^2)^2}; \frac{H_i''(s)}{(1+H_i'(s)^2)^2}; 0 \right\}, \quad (13)$$

а  $\alpha_b; \beta_b; \gamma_b$  – одиничні вектори, що відповідають вектору з координатами

$$\vec{b} = \left\{ 0; 0; \frac{H_i''(s)}{(1+H_i'(s)^2)^{3/2}} \right\}. \quad (14)$$

Якщо не враховуються деформації перерізів ТОЦП, то:

- для прямолінійних ділянок  $\rho = (s, \varphi, r) = v$ ;

- для тороподібних ділянок

$$\vec{r} = \begin{cases} x = (R + r \cos \alpha) \cos \theta, & \varphi \in (0; 2\pi]; \\ y = (R + r \cos \alpha) \sin \theta, & r \in [R_1^g; R_2^g]; \\ z = r \sin \varphi, & \varphi \in (\varphi'_1; \varphi'_2); \end{cases} \quad (15)$$

де  $R$  визначається з (8),  $\varphi'_1; \varphi'_2$  – з (9);  $R_1^g; R_2^g$  – внутрішній та зовнішній радіуси деформованої труби. Якщо ці радіуси не змінюються то вони приймаються такими ж, як і в (2);

- для конічної ділянки

$$\bar{r} = \begin{cases} x = s + (x_n(s)\sin\varphi + \alpha_b(s)\cos\varphi)\rho(s; r); \\ y = H_2(s) + (\beta_n(s)\sin\varphi + \beta_b(s)\cos\varphi)\rho(s; r); \\ z = (\gamma_n(s)\sin\varphi + \gamma_b(s)\cos\varphi)\rho(s; r); \end{cases} \quad (16)$$

де  $\rho(s; r)$  визначається з урахуванням деформації перерізу. Якщо такі деформації не враховуються, то  $\rho(s; r)$  визначаються за (4). З урахуванням (13) та (14) формула (16) набуває вигляду

$$\bar{r} = \begin{cases} x = s + \alpha_4(s)\sin\varphi, & \rho(s; r); \\ y = H_2(s) + \beta_n(s)\sin\varphi, & \rho(s; r); \\ z = \gamma_b(s)\cos\varphi, & \beta(s; r); \end{cases} \quad (17)$$

а (12) подається наступним чином

$$\bar{r}_i = \begin{cases} x = s + \alpha_n(s)\sin\varphi; \\ y = H_i(s) + \beta_4(s)\sin\varphi; \\ z = \gamma_b(s)\cos\varphi. \end{cases} \quad (18)$$

Завдання залежностей (1)-(18) дозволяє визначити зміну НДС ТОЦП за наступною послідовністю [3]:

1. Визначаються локальні базиси в кожній з точок в початковий момент часу

$$\bar{\vartheta}_i^0 = \frac{\partial \bar{r}_0}{\partial x_i}; \quad x_1 = s; \quad x_2 = \varphi; \quad x_3 = r, \quad (19)$$

Вектори  $\bar{V}_0$  для відповідних конфігурацій визначаються за формулами (1); (2); (3) відповідно шляхом прямого диференціювання.

2. Визначаються локальні базиси в контрольний момент часу

$$\bar{\vartheta}_i^k = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x_i}; \quad x_1 = s; \quad x_2 = \varphi; \quad x_3 = r; \quad (20)$$

де  $\bar{r}$  для відповідних конфігурацій ділянок визначаються за формулами (12) (або (18)); (15) та (16) (або (17)). Важливо лише дотримуватись відповідності між видами ділянок в початковий та контрольний моменти часу. За знайденими  $\bar{\vartheta}_i^0, \bar{\vartheta}_i^k$  для кожного із типів ділянок визначаються компоненти метричних тензорів:

$$g_{ij}^0 = \bar{\vartheta}_i^0 \bar{\vartheta}_j^0; \quad (21)$$

$$g_{ij}^k = \bar{\vartheta}_i^k \bar{\vartheta}_j^k. \quad (22)$$

3. За знайденими значеннями  $g_{ij}^0, g_{ij}^k$  для кожного з типів ділянок знаходяться компоненти тензора деформацій за формулою

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - g_{ij}^0), \quad (23)$$

які характеризують деформації осьового типу  $\varepsilon_{ii}$  з однаковими індексами та зсувні  $\varepsilon_{ij}$  з різними індексами.

4. Для подальших обчислень необхідно за компонентами  $\{g_{ij}\}$  для кожного із типів ділянок знайти компоненти оберненої матриці  $\{g^{ij}\}$ .

Компоненти з нижніми індексами називаються коваріантними, а з верхніми контраваріантними [3].

5. Після знаходження компонент  $g^{ij}$  обчислюються компоненти тензора напружень для кожного з типів ділянки за формулою

$$\sigma_{ij} = \lambda I_1(\epsilon) g_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}, \quad (24)$$

де  $\lambda$  та  $\mu$  – параметри Ламе матеріалу, вони пов'язані з модулем Юнга та коефіцієнтом Пуассона співвідношеннями

$$\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}, \lambda = \frac{\sigma E}{(1-2\sigma)(1+\sigma)}; \quad (25)$$

$I_1(\epsilon)$  – перший інваріант тензора деформацій, який для кожного з типів ділянок обчислюється за формулою

$$I_1(\epsilon) = \sum_{ij=1}^3 \epsilon_{ij} g^{ij}. \quad (26)$$

Слід зазначити, що можна провести уточнений розрахунок компонент тензора напружень, який дозволяє врахувати особливості деформованого об'єкта за різних температур середовища. Зокрема, якщо тіло деформувалось за сталої температури  $T_0$  (а різні температурні режими характерні для функціонування ТОЦП), то поява деформацій обумовлює зміну (хоча і незначну) температури

$$T - T_0 = -\frac{(3\lambda+2\mu)\alpha T_0}{\rho c} I_1(\epsilon_{ij}), \quad (27)$$

де  $\lambda$ ,  $\mu$  – коефіцієнти Ламе;  $\alpha$  – коефіцієнт лінійного теплового розширення;  $I_1(\epsilon_{ij})$  – обчислений за (26) перший інваріант тензора деформацій;  $T_0$  – початкова температура тіла;  $\rho$  – густина матеріалу;  $c$  – питома теплоємність матеріалу при сталих деформаціях. Такий підхід є вмотивованим у тих випадках, коли тіло не зазнає в процесі деформування значних температурних перепадів. При цьому для обчислення компонент тензора напружень замість залежностей (24) використовується аналогічна за структурою формула

$$\sigma_{ij} = \left[ \lambda + \frac{(3\lambda+2\mu)^2 \alpha^2 T_0}{\rho c} \right] I_1(\epsilon) g_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}. \quad (28)$$

**Висновок.** Проведені модельні розрахунки показують, що найбільш небезпечною з точки зору виникнення критичних деформацій та напружень є зона спряження конічної та прямолінійної ділянки. Для більш ефективного контролю та управління об'єктами цукрової промисловості наші дослідження з визначення робочих температурних режимів та напружень будуть продовжені.

### *Література*

1. Олійник А.П. Математичний апарат для контролю НДС трубопроводів при зміні їх просторового положення. / А.П. Олійник, Л.М. Заміховський. – Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2008. – 306 с.
2. Самарский А.А. Численные методы // А.А. Самарский, А.В. Гулин – М.: Наука, 1989. – 432 с.

3. Седов Л.И. Механика сплошных сред. / Л.И. Седов – М.: Наука, 1984. – 572 с.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 20.09.2019 р.  
Рекомендовано до друку д.т.н., професором **Мойсишиним В.М.**,  
д.т.н., професором **Заміховським Л.М.***

## MODELING OF DEFORMATION OF OBJECTS OPERATING UNDER CONDITIONS OF TEMPERATURE INFLUENCES

**G. V. Grygorchuk, A. P. Oliynyk, L. I. Grygorchuk, V. V. Rys**

*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;  
76019, Ivano-Frankivs'k, Karpatska Str. 5;  
e-mail: math@nung.edu.ua*

*A mathematical model of the deformation and stress state process for long rotating objects complex geometric configuration is proposed. The model of the process of deformation of plots, which are combinations of sections of rectilinear, spherical and conical forms, is proposed, parametric representation of the law of motion of the specified plots in the initial and control moments of time is constructed, on the basis of which the components of vectors of local bases and components of the metric tensor for the specified types of plots are determined. What are the components of the stress tensor. The theory of systems of systems of linear algebraic equations was used to determine the geometric characteristics of a deformed spherical section, as well as the apparatus of the Hermite interpolation polynomials for modeling the axis deformation process. Within the framework of linear elasticity theory, the components of the stress tensor arising from non-isothermal processes characteristic of sugar industry technological objects operation have been calculated. The components of the stress tensor, which allows to take into account the features of the deformed object at different ambient temperatures, have been refined. The model of the stress state of objects is offered, the test calculations for the model sites are carried out, the directions of further researches are revealed.*

**Key words:** *stress tensor, geometric configuration, rectilinear geometric model, cylindrical geometric model, spherical geometric model, object deformation.*