Алгебра і геометрія

УДК 512.622, 512.643.8
DOI: 10.31471/2304-7399-2019-1(53)-29-37

СИМЕТРИЧНІ МНОГОЧЛЕНИ ТА ФУНКЦІЇ ТРИКУТНИХ МАТРИЦЬ (ТАБЛИЦЬ)

Т. П. Гой, Р. А. Заторський, І. І. Ліщинський
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;
м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка 57;
e-mail: tarasgoy@yahoo.com, romazatorsky@gmail.com,
lishchynsky81@gmail.com

Використовуючи функції трикутних матриць (таблиць), встановлено формули для членів лінійних однорідних рекурентних рівнянь високого порядку вигляду

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_p u_{n-p} + \cdots + a_n u_0,$$

$$v_n = a_1 v_{n-1} - a_2 v_{n-2} + \cdots + (-1)^{p-1} a_p v_{n-p} + \cdots + (-1)^{n-1} a_n v_0,$$

де $a_1 = \ldots = a_{p-1} = 0$*, а початкові елементи* $u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}$ *і* $v_0, v_1, \ldots, v_{p-1}$ *є довільними, причому* $u_j = 0, v_j = 0$*, якщо* $j < 0$*. Як наслідок, нами отримано деякі формули, які встановлюють зв'язок між симетричними многочленами.*

Ключові слова: *трикутна матриця, паравизначник, параперманент, елементарний симетричний многочлен, однорідний симетричний многочлен, степеневий симетричний многочлен.*

Вступ

Математика є формалізованою мовою для відображення навколишнього світу, тому її поняття наповнені різного роду симетріями. Причому симетрії зустрічаються не тільки у геометрії, але й у алгебрі, де використовуються, наприклад, групи симетрій та симетричні многочлени. У цій статті ми досліджуємо деякі симетричні многочлени багатьох змінних. Згідно з основною теоремою теорії симетричних многочленів, довільний симетричний многочлен можна однозначно виразити через елементарні симетричні многочлени, хоча алгебричним базисом для такого представлення можуть бути також степеневі, а також повні однорідні симетричні многочлени. Виражаючи симетричні многочлени через базисні симетричні многочлени, часто одержують лінійні рекурентні співвідношення, многочлени розбиттів та парафункції трикутних матриць чи відповідні їм визначники Гессенберга [5].

Теоретичним інструментом для досліджень лінійних рекурентних рівнянь і симетричних многочленів у цій статті є трикутні матриці (таблиці). Трикутні матриці та функції від них мають широке застосування в алгебрі, комбінаториці, теорії чисел, диференціальних рівняннях та інших галузях математики [1–10]. Наприклад, у [10] перші два автори, використовуючи числення трикутних матриць, довели низку загальних теорем, що стосуються числових послідовностей, які генеруються лінійними рекурентними співвідношеннями високого порядку. Використання трикутних матриць у цій статті дозволило знайти розв’язки рекурентних рівнянь без розв’язування відповідних характеристичних рівнянь. У [8] досліджуються числові послідовності, що генеруються лінійними рекурентними співвідношеннями, однак лінійні рекурентні рівняння, що генерують ці послідовності, є нескінченними.

1. Попередні означення та допоміжні твердження

У цьому розділі ми наведемо основні поняття числення трикутних матриць (таблиць). Для детальнішого знайомства з поняттями, твердженнями та застосуваннями числення трикутних матриць радимо ознайомитись з монографією [5] та наведеною там бібліографією.

Під *трикутною матрицею* (*таблицею*) n-го порядку розуміємо числову таблицю

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

яку коротко позначатимемо $(a_{ij})_{1\le j\le i\le n}$ або $(a_{ij})_n$. Зауважимо, що матриця (1) не є матрицею у загальноприйнятому розумінні цього терміну, бо вона не прямокутною числовою таблицею.

Паравизначником $\operatorname{ddet}(A_n)$ і *параперманентом* $\operatorname{pper}(A_n)$ трикутної матриці (1) називають числа

$$\operatorname{ddet}(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{|p_i|=n} (-1)^{n-i} \prod_{s=1}^{i} \left\{ a_{|p_s|,|p_{s-1}|+1} \right\},$$

$$\operatorname{pper}(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{|p_i|=n} \prod_{s=1}^{i} \left\{ a_{|p_s|,|p_{s-1}|+1} \right\},$$

де

$$\{a_{ij}\} = a_{ij} a_{i,j+1} \cdots a_{ii},$$

$|p_i| = p_1 + \cdots + p_i$, а друге підсумовування в обох формулах здійснюється за усіма натуральними розв’язками p_k рівняння $|p_i| = n$.

Приклад 1. Паравизначник третього порядку $\operatorname{ddet}(A_3)$ і параперманент четвертого порядку $\operatorname{pper}(A_4)$ обчислюємо за формулами

$$\operatorname{ddet}(A_3) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{21}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{33} + a_{31}a_{32}a_{33},$$

$$\operatorname{pper}(A_4) = a_{41}a_{42}a_{43}a_{44} + a_{31}a_{32}a_{33}a_{44} + a_{21}a_{22}a_{43}a_{44} + a_{21}a_{22}a_{33}a_{44}$$
$$+ a_{11}a_{42}a_{43}a_{44} + a_{11}a_{32}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{22}a_{43}a_{44} + a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

Паравизначник і параперманент трикутної матриці (1) називатимемо *парафункціями*.

Парафункції трикутної матриці (1) можна розкласти за елементами довільної вписаної прямокутної матриці, однак ми наведемо лише формули розкладу матриці (1) за елементами останнього рядка.

Лема 1. [5] *Для парафункцій трикутної матриці* (1) *справджуються формули*

$$\operatorname{ddet}(A_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i} \{a_{ni}\} \operatorname{ddet}(A_{i-1}),$$

$$\operatorname{pper}(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \{a_{ni}\} \operatorname{pper}(A_{i-1}), \tag{2}$$

де $\operatorname{ddet}(A_0) \equiv 1$, $\operatorname{pper}(A_0) \equiv 1$.

Розглянемо послідовність трикутних матриць вигляду

$$B_n(k) = \begin{pmatrix} k_1 a_1 & & & \\ k_2 \dfrac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & \\ k_n \dfrac{a_n}{a_{n-1}} & \cdots & \dfrac{a_2}{a_1} & a_1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

які у більш загальному випадку вивчались у [9].

Лема 2. [9] *Для парафункцій трикутної матриці* (3) *справджуються формули*

$$\operatorname{ddet}(B_n(k)) = \sum_{\sigma_n = n} \frac{(-1)^{n-|s_n|}}{|s_n|} \left(\sum_{i=1}^{n} s_i k_i \right) p_n(s) a_1^{s_1} a_2^{s_2} \cdots a_n^{s_n}, \tag{4}$$

$$\operatorname{pper}(B_n(k)) = \sum_{\sigma_n = n} \frac{1}{|s_n|} \left(\sum_{i=1}^{n} s_i k_i \right) p_n(s) a_1^{s_1} a_2^{s_2} \cdots a_n^{s_n}, \tag{5}$$

де $p_n(s) = \dfrac{(s_1 + \cdots + s_n)!}{s_1! \cdots s_n!}$, $\sigma_n = s_1 + 2s_2 + \cdots + ns_n$, $|s_n| = s_1 + \cdots + s_n$, *а перше підсумовування в обох формулах здійснюється за усіма невід'ємними цілими розв'язками рівняння* $\sigma_n = n$.

Зауважимо, що рівності (4) і (5) справджуються й тоді, коли деякі елементи трикутної матриці (3) дорівнюють нулю, бо при обчисленні відповідної парафункції нулі скоротяться і невизначеність зникне.

2. Використання парафункцій трикутних матриць до розв'язування лінійних рекурентних рівнянь

Розглянемо лінійні однорідні рекурентні рівняння високого порядку зі сталими коефіцієнтами вигляду

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_p u_{n-p} + \cdots + a_{n-1} u_1 + a_n u_0, \tag{6}$$

$$v_n = a_1 v_{n-1} - a_2 v_{n-2} + \cdots + (-1)^{p-1} a_p v_{n-p} + \cdots + (-1)^{n-1} a_n v_0, \tag{7}$$

де $a_1 = \ldots = a_{p-1} = 0$, $u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}$ та $v_0, v_1, \ldots, v_{p-1}$ – довільні початкові елементи $(p \geq 1)$ і $u_j = 0, v_j = 0$ для $j < 0$.

Теорема 1. *Рекурентні рівняння* (6), (7) *можна записати через початкові елементи у вигляді*

$$u_n = \alpha_0^{(n)} u_0 + \alpha_1^{(n)} u_1 + \cdots + \alpha_{p-1}^{(n)} u_{p-1}, \tag{8}$$

$$v_n = \beta_0^{(n)} v_0 + \beta_1^{(n)} v_1 + \cdots + \beta_{p-1}^{(n)} v_{p-1}, \tag{9}$$

де коефіцієнти $\alpha_k^{(n)}$, $\beta_k^{(n)}$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$, *виражаються формулами*

$$\begin{aligned} \alpha_k^{(n)} &= \operatorname{pper}\left(\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right)_{1 \leq j \leq i \leq n-k} \\ &= \sum_{ps_p + \cdots + (n-k)s_{n-k} = n-k} \frac{(s_p + \cdots + s_{n-k})!}{s_p! \cdots s_{n-k}!} a_p^{s_p} a_{p+1}^{s_{p+1}} \cdots a_{n-k}^{s_{n-k}}, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \beta_k^{(n)} &= \operatorname{ddet}\left(\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right)_{1 \leq j \leq i \leq n-k} \\ &= \sum_{ps_p + \cdots + (n-k)s_{n-k} = n-k} (-1)^{n-(s_p + \cdots + s_{n-k})} \frac{(s_p + \cdots + s_{n-k})!}{s_p! \cdots s_{n-k}!} a_p^{s_p} a_{p+1}^{s_{p+1}} \cdots a_{n-k}^{s_{n-k}}, \end{aligned}$$

причому $a_0 \equiv 1$.

Доведення. Доведемо рівність (8). Параперманенти з правої частини (10) за формулою (2) розкладемо за елементами останнього рядка відповідної трикутної матриці:

$$u_n = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\sum_{s=1}^{n-k} a_s \operatorname{pper}\left(\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right)_{n-k-s} \right) u_k.$$

Згрупувавши в останній рівності доданки біля a_s, одержуємо рівність

$$u_n = \sum_{s=p}^{n} a_s \sum_{k=0}^{p-1} \operatorname{pper}\left(\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right)_{n-k-s} u_k,$$

з якої, враховуючи, що

$$\sum_{k=0}^{p-1} \operatorname{pper}\left(\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right)_{n-k-s} u_k = u_{n-s},$$

остаточно отримуємо потрібне рекурентне співвідношення (6):

$$u_n = \sum_{s=p}^{n} a_s u_{n-s}.$$

Представлення $\alpha_k^{(n)}$ через суму (10) випливає з формули (5), якщо в неї підставити $k_1 = \ldots = k_n = 1$ і $a_1 = \ldots = a_{p-1} = 0$.

Формула (9) доводиться аналогічно. Теорему доведено.

3. Зв'язок між симетричними многочленами через парафункції трикутних матриць

Через $p_k(x) = p_k(x_1, \ldots, x_n)$ і $\sigma_k(x) = \sigma_k(x_1, \ldots, x_n)$ позначимо, відповідно, повний однорідний симетричний многочлен і елементарний симетричний многочлен степенів *k* змінних $x_1, \ldots, x_n$, тобто

$$p_k(x) = \sum_{j_1 + \cdots + j_n = k} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n},$$

$$\sigma_k(x) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k},$$

де $1 \le k \le n$, $p_0(x) = 1$, $\sigma_0(x) = 1$.

У [5], використовуючи апарат трикутних матриць, доведені рівності

$$p_k(x) = \sigma_1(x) p_{k-1}(x) - \sigma_2(x) p_{k-2}(x) + \cdots + (-1)^{k-1} \sigma_k(x) p_0(x),$$

$$\sigma_k(x) = p_1(x)\sigma_{k-1}(x) - p_2(x)\sigma_{k-2}(x) + \cdots + (-1)^{k-1} p_k(x)\sigma_0(x)$$

та встановлено, що симетричні многочлени $p_k(x)$, $\sigma_k(x)$ можуть бути представлені через паравизначники *k*-го порядку похилої структури за взаємооберненими формулами вигляду

$$p_k(x) = \operatorname{ddet}\left(\begin{array}{ccccc} \sigma_1(x) & & & & \\ \dfrac{\sigma_2(x)}{\sigma_1(x)} & \sigma_1(x) & & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & & \\ \dfrac{\sigma_{k-1}(x)}{\sigma_{k-2}(x)} & \dfrac{\sigma_{k-2}(x)}{\sigma_{k-3}(x)} & \cdots & \sigma_1(x) & \\ \dfrac{\sigma_k(x)}{\sigma_{k-1}(x)} & \dfrac{\sigma_{k-1}(x)}{\sigma_{k-2}(x)} & \cdots & \dfrac{\sigma_2(x)}{\sigma_1(x)} & \sigma_1(x) \end{array}\right),$$

$$\sigma_k(x) = \operatorname{ddet}\left(\begin{array}{ccccc} p_1(x) & & & & \\ \dfrac{p_2(x)}{p_1(x)} & p_1(x) & & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & & \\ \dfrac{p_{k-1}(x)}{p_{k-2}(x)} & \dfrac{p_{k-2}(x)}{p_{k-3}(x)} & \cdots & p_1(x) & \\ \dfrac{p_k(x)}{p_{k-1}(x)} & \dfrac{p_{k-1}(x)}{p_{k-2}(x)} & \cdots & \dfrac{p_2(x)}{p_1(x)} & p_1(x) \end{array}\right)$$

або, згідно з (4), (5), у вигляді

$$p_k(x) = \sum_{s_1+2s_2+\cdots+ks_k=k} (-1)^{k-(s_1+\cdots+s_k)} \frac{(s_1+\cdots+s_k)!}{s_1!\cdots s_k!} \sigma_1^{s_1}(x)\sigma_2^{s_2}(x)\cdots\sigma_k^{s_k}(x),$$

$$\sigma_k(x) = \sum_{s_1+2s_2+\cdots+ks_k=k} (-1)^{k-(s_1+\cdots+s_k)} \frac{(s_1+\cdots+s_k)!}{s_1!\cdots s_k!} p_1^{s_1}(x)p_2^{s_2}(x)\cdots p_k^{s_k}(x).$$

З попереднього випливає, що теорема 1 справджуватиметься, якщо у (8), (9) підставити $u_i = p_i(x)$ та $a_i = \sigma_i(x)$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Теорема 2. *Нехай у рекурентному рівнянні*

$$y_n = x_1 y_{n-1} - x_2 y_{n-2} + \cdots + (-1)^{n-2} x_{n-1} y_1 + (-1)^{n-1} a_n x_n y_0 \qquad (11)$$

$x_1 = \ldots = x_{p-1} = 0$, $p = 1,\ldots,n-1$. *Тоді*

$$y_n = \omega_{n-p+1} y_{p-1} + \omega_{n-p+2} y_{p-2} + \cdots + \omega_{n-1} y_1 + \omega_n^* y_0, \qquad (12)$$

де

$$\omega_k = \operatorname{ddet}\left(\frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}}\right)_{1\le j\le i\le k}$$

$$= \sum_{ps_p+\cdots+ks_k=k} (-1)^{k-(s_p+\cdots+s_k)} \frac{(s_p+\cdots+s_k)!}{s_p!\cdots s_k!} x_p^{s_p} x_{p+1}^{s_{p+1}} \cdots x_k^{s_k},$$

$$\omega_n^* = \operatorname{ddet}\begin{pmatrix} a_1 x_1 & & & \\ a_2 \dfrac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & \\ a_n \dfrac{x_n}{x_{n-1}} & \cdots & \dfrac{x_2}{x_1} & x_1 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{ps_p+\cdots+ns_n=n} (-1)^{n-(s_p+\cdots+s_n)} \sum_{i=p}^{n} s_i a_i \frac{(s_p+\cdots+s_n-1)!}{s_p!\cdots s_n!} x_p^{s_p} x_{p+1}^{s_{p+1}} \cdots x_n^{s_n}.$$

Доведення. Припустимо, що рівність (12) справджується для всіх $s = p, p+1,\ldots,n-1$, й доведемо її виконання для $s = n$. Для цього підставимо у праву частину (11) вирази $y_{n-1},\ldots,y_p$. Тоді

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i \sum_{j=1}^{p-1} \omega_{n-i-j} y_j + \omega_{n-i}^* y_0.$$

Згрупувавши всі доданки біля y_j, одержуємо

$$y_n = \sum_{j=1}^{p-1} y_j \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i \omega_{n-i-j} \right) + y_0 \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i \omega_{n-i}^*.$$

Але вираз у дужках останньої рівності та сума $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}x_i\overset{*}{\omega}_{n-i}$, згідно з (2), є розвиненням паравизначників ω_{n-j} і $\overset{*}{\omega}_n$ за елементами їх останніх рядків. Таким чином, одержуємо рівність (12):

$$y_n = \sum_{j=1}^{p-1} y_j\omega_{n-j} + y_0\overset{*}{\omega}_n.$$

Теорему доведено.

Наслідок 1. Якщо у рівнянні (11) $a_n = n$, а $y_0 = 1$, то одержуємо формулу

$$nx_n = x_{n-1}y_1 - x_{n-2}y_2 + \cdots + (-1)^n x_1 y_{n-1} + (-1)^{n+1} y_n,$$

аналогічну до формули Ньютона, яка встановлює зв'язок між елементарними симетричними многочленами $\sigma_k(x)$ і степеневими симетричними многочленами $s_k(x) = x_1^k + \cdots + x_n^k$, $\quad k = 1,2,\ldots,n$, у вигляді

$$n\sigma_n(x) = \sigma_{n-1}(x)s_1(x) - \cdots + (-1)^n \sigma_1(x)s_{n-1}(x) + (-1)^{n+1}s_n(x).$$

Наслідок 2. Якщо у (11) $a_i = i$, то одержуємо записану через паравизначник формулу Варінга, яка виражає степеневі суми $s_k(x)$, $k = 1,2\ldots,n$, через елементарні симетричні многочлени $\sigma_k(x)$:

$$s_k(x) = \mathrm{ddet}\begin{pmatrix} \sigma_1(x) & & & & \\ 2\dfrac{\sigma_2(x)}{\sigma_1(x)} & \sigma_1(x) & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & \\ (k-1)\dfrac{\sigma_{k-1}(x)}{\sigma_{k-2}(x)} & \dfrac{\sigma_{k-2}(x)}{\sigma_{k-3}(x)} & \cdots & \sigma_1(x) & \\ k\dfrac{\sigma_k(x)}{\sigma_{k-1}(x)} & \dfrac{\sigma_{k-1}(x)}{\sigma_{k-2}(x)} & \cdots & \dfrac{\sigma_2(x)}{\sigma_1(x)} & \sigma_1(x) \end{pmatrix}.$$

Теоерма 3. *Нехай у рекурентному рівнянні*

$$y_n = x_1y_{n-1} + x_2y_{n-2} + \cdots + x_{n-1}y_1 + a_nx_ny_0$$

виконуються рівності $x_1 = x_2 = \ldots = x_{p-1} = 0$, $p = 1,2,\ldots,n-1$. *Тоді*

$$y_n = \mu_{n-p+1}y_{p-1} + \mu_{n-p+2}y_{p-2} + \cdots + \mu_{n-1}y_1 + \overset{*}{\mu}_n y_0,$$

де для $k = n-p+1,\ldots,n-1,$ *позначено*

$$\mu_k = \mathrm{pper}\left(\frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}}\right)_{1\le j\le i\le k}$$

$$= \sum_{ps_p+\cdots+ks_k=k} \frac{(s_p+\cdots+s_k)!}{s_p!\cdots s_k!} x_p^{s_p} x_{p+1}^{s_{p+1}} \cdots x_k^{s_k},$$

$$\mu_n^* = \operatorname{pper}\begin{pmatrix} a_1 x_1 & & & \\ a_2 \dfrac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & \\ a_n \dfrac{x_n}{x_{n-1}} & \cdots & \dfrac{x_2}{x_1} & x_1 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{ps_p+\cdots+ns_n=n} \sum_{i=p}^{n} s_i a_i \frac{(s_p+\cdots+s_n-1)!}{s_p!\cdots s_n!} x_p^{s_p} x_{p+1}^{s_{p+1}} \cdots x_n^{s_n}.$$

Доведення цієї теореми проводиться аналогічно до доведення теореми 2.

Висновки. Застосування функцій трикутних матриць (таблиць) є ефективним для розв'язування лінійних рекурентних рівнянь високого порядку. У цій статті, зокрема, нами встановлено формули для членів лінійних однорідних рекурентних рівнянь спеціального вигляду з довільними початковими елементами. Ці формули використовуються для отримання формул, які встановлюють зв'язок між симетричними многочленами.

Література

1. Гой Т.П. Використання трикутних матриць для побудови звичайних диференціальних рівнянь за відомою фундаментальною системою розв'язків / Т.П. Гой, Р.А. Заторський // Наук. записки НаУКМА. Фіз.-мат. науки. – 2015. – Т. 165. – С. 3-6.
2. Гой Т.П. Про один клас взаємно обернених многочленів розбиттів / Т.П. Гой, Р.А. Заторський // Прикарпатський вісник НТШ. Серія «Число». – Т. 1, № 33. – С. 146-151.
3. Заторский Р.А. Треугольные матрицы и комбинаторные формулы обращения / Р.А. Заторский, А.Р. Малярчук // Матем. заметки. – 2009. –Т. 85, № 1. – С. 12-21.
4. Заторский Р.А. Определители треугольных матриц и траектории на диаграммах Ферре / Р.А. Заторский // Матем. заметки. – 2002. –Т. 72, № 6. – С. 834-852.
5. Заторський Р.А. Числення трикутних матриць та його застосування / Р.А. Заторський. – Івано-Франківськ: Сімик, 2010. – 508 с.
6. Семенчук А.В. Парадетермінати та формальні експоненціальні ряди / А.В. Семенчук // Карпатські матем. публ. – 2009. – Т. 1, № 1. – С. 85-91.
7. Тараканов В.Е. О связи детерминантов с перманентами / В.Е. Тараканов, Р.А. Заторский // Матем. заметки. – 2009. –Т. 85, № 2. – С. 292-299.
8. Goy T. Infinite linear recurrence relation and superposition of linear recurrence equations / T. Goy, R. Zatorsky // J. Integer Seq. – 2017. – Vol. 20. – Article 17.5.3.

9. Zatorsky R. On one class of partition polynomials / R. Zatorsky, S. Stefluk // Algebra Discrete Math. – 2013. – Vol. 16, № 1. – P. 127-133.
10. Zatorsky R. Parapermanents of triangular matrices and some general theorems on number sequences / R. Zatorsky, T. Goy // J. Integer Seq. – 2016. – Vol. 19. – Article 16.2.2.

Стаття надійшла до редакційної колегії 19.09.2019 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором ***Загороднюком А.В.***
д.ф.-м.н., професором ***Григорчуком Р.І.*** *(Техас, США)*

SYMMETRIC POLYNOMIALS AND FUNCTIONS OF TRIANGULAR MATRICES (TABLES)

T. P. Goy, R. A. Zatorsky, I. I. Lishchynsky
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;
76018, Ivano-Frankivsk, Shevchenko str., 57;
e-mail: tarasgoy@yahoo.com, romazatorsky@gmail.com,
lishchynsky81@gmail.com

Using the functions of triangular matrices (tables), we established formulas for members of high order linear homogeneous recurrence equations

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_p u_{n-p} + \cdots + a_n u_0,$$

$$v_n = a_1 v_{n-1} - a_2 v_{n-2} + \cdots + (-1)^{p-1} a_p v_{n-p} + \cdots + (-1)^{n-1} a_n v_0,$$

where $a_1 = \ldots = a_{p-1} = 0$*, and initial elements* $u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}$*,* $v_0, v_1, \ldots, v_{p-1}$ *are arbitrary, moreover* $u_j = 0, v_j = 0$*, if* $j < 0$*. Consequently, we obtained some connection formulas between symmetric polynomials.*

Key words: *triangular matrix (table), paradeterminant, parapermanent, elementary symmetric polynomial, homogeneous symmetric.*