Диференціальні рівняння і математична фізика

УДК 517.95+511.2
DOI: 10.31471/2304-7399-2019-1(53)-21-28

ЗАДАЧА СПРЯЖЕННЯ З БАГАТОТОЧКОВИМИ УМОВАМИ ДЛЯ МІШАНОГО РІВНЯННЯ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ В ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБЛАСТІ

О. М. Медвідь[1], І. Я. Савка[1], І. Р. Тимків[2]

[1]Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України; 79060, м. Львів, вул. Наукова 3-б;
[2]Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76018, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
e-mail: tymkiv_if@ukr.net

У шкалі просторів Соболєва отримано коректну розв'язність задачі спряження з локальними багатоточковими умовами за виділеною змінною та умовами періодичності за іншою координатою для мішаних рівнянь гіперболічного типу високих порядків. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникли при побудові розв'язку задачі. Доведено, що такі умови виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів складених з вузлів інтерполяції багатоточкових умов.

Ключові слова: *мішане рівняння, гіперболічне рівняння, умови спряження, багатоточкові умови, малий знаменник, міра Лебега.*

1. Процеси, що проходять в двошарових середовищах із різко відмінними фізичними властивостями, приводять до розгляду задач спряження, коли на одній частині області задано одне рівняння, а на іншій друге рівняння [1, 4, 9, 1]. Особлива увага при цьому приділяється умовам узгодження (спряження, сполучення, переносу) на межах розділу підобластей тіла або середовища. Початок досліджень крайових задач для рівнянь мішаного типу було покладено Ф. Трікомі (1928) та С. Геллерстедтом (1935). Питання щодо розв'язності крайових задач для диференціальних рівнянь змішаного типу активно розглядались у роботах різних авторів (див. літературу). Зокрема, для випадку багатьох змінних задачі спряження з нелокальними умовами для параболо-гіперболічного рівняння другого порядку вивчались у роботах [7, 2].

У даній роботі у циліндричній області розглядається задача спряження для двох рівнянь гіперболічного типу високих порядків n і m відповідно, однорідних за порядком диференціювання, з локальними багатоточковими умовами.

Надалі використаємо такі позначення: Ω – коло радіуса $1, D=\{(t,x): t\in\left(-T,T\right),\ x\in\Omega\}$, де $T>0$; $D_-=D\cap\{t<0\}$, $D_+=D\cap\{t>0\}$; H_q, $q\in R$, – простір, одержаний поповненням простору скінченних сумм $\varphi(x)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\varphi_k e^{ikx}$, за нормою $\left\|\varphi;H_q\right\|=\sqrt{\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\left|\varphi_k\right|^2(1+|k|)^{2q}}$, де $\varphi_k\in C$; $C^n([0,T];H_q)$, $n\in Z_+$, – простір функцій $u(t,x)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}u_k(t)e^{ikx}$, $u_k(t)\in C^n([0,T])$, таких, що для кожного фіксованого $t\in[0,T]$ функції $\dfrac{\partial^s u(t,x)}{\partial t^s}:=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}u_k^{(s)}(t)e^{ikx}$ належать до простору, H_{q-s}, $s\in\{0,1,\ldots,n\}$, і є неперервними за t в нормі цього простору

$$\left\|u;C^n([0,T];H_q)\right\|=\sum_{s=0}^{n}\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial^s u(t,\cdot)}{\partial t^s};H_{q-s}\right\|.$$

2. В області D для рівнянь

$$\begin{cases} L_1(\partial/\partial t,\partial/\partial x)u=\dfrac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n}+\sum\limits_{s=1}^{n}a_s\dfrac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^{n-s}\partial x^s}=0, & (t,x)\in D_-,\\ L_2(\partial/\partial t,\partial/\partial x)u=\dfrac{\partial^m u(t,x)}{\partial t^m}+\sum\limits_{s=1}^{m}b_s\dfrac{\partial^m u(t,x)}{\partial t^{m-s}\partial x^s}=0, & (t,x)\in D_+,\end{cases}\tag{1}$$

розглянемо задачу з умовами спряження при $t=0$ та локальними багатоточковими умовами

$$\lim_{t\to-0}\frac{\partial^{q-1}u(t,x)}{\partial t^{q-1}}=\lim_{t\to+0}\frac{\partial^{q-1}u(t,x)}{\partial t^{q-1}}, q\in\{1,\ldots,\theta\},\ 1<\theta\le\min\{n,m\},\tag{2}$$

$$\begin{cases} u(t_j,x)=\varphi_j(x), j\in\{1,\ldots,r\}, -T\le t_1<\ldots<t_r<0,\ 1\le r\le n,\\ u(t_j,x)=\varphi_j(x),\quad j\in\{r+1,\ldots,\ell\},\ 0<t_{r+1}<\ldots<t_\ell\le T,\ \ell=n+m-\theta,\end{cases}\tag{3}$$

де $a_s,b_s\in R,\ n,m\in N.$ Вважатимемо, що рівняння (1) гіперболічне.

Означення. *Розв'язком задачі* (1) – (3) *називаємо таку функцію* $u=u(t,x)$, *що*

$$u\in C^n([-T,0];H_q), u\in C^m([0,T];H_q),$$

$$\left\|L_1(\partial/\partial t,\partial/\partial x)u;C([-T,0];H_{q-n})\right\|=0,\ \left\|L_2(\partial/\partial t,\partial/\partial x)u;C([0,T];H_{q-m})\right\|=0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left\|\frac{\partial^{j-1}u(-\varepsilon,\cdot)}{\partial t^{j-1}}-\frac{\partial^{j-1}u(\varepsilon,\cdot)}{\partial t^{j-1}};H_{q+1-j}\right\|=0,\quad j\in\{1,\dots,\theta\},\quad \left\|u(t_j,\cdot)-\varphi_j(\cdot);H_q\right\|=0,\quad j\in\{1,\dots,\ell\}.$$

3. Розв'язок задачі (1) – (3)шукаємо у вигляді ряду Фур'є

$$u(t,x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}u_k(t)e^{ikx}\,. \tag{4}$$

Кожна з функцій $u_k(t)$, $k\in Z$ є розв'язком рівняння

$$\begin{cases}\dfrac{d^n u_k(t)}{dt^n}+\sum\limits_{s=1}^{n}a_s(ik)^s\dfrac{d^n u_k(t)}{dt^{n-s}}=0, & t<0,\\[2ex] \dfrac{d^m u_k(t)}{dt^m}+\sum\limits_{s=1}^{m}b_s(ik)^s\dfrac{d^m u_k(t)}{dt^{m-s}}=0, & t>0,\end{cases} \tag{5}$$

Справджує умови спряження

$$\lim_{t\to-0}\frac{d^{q-1}u_k(t)}{dt^{q-1}}=\lim_{t\to+0}\frac{d^{q-1}u_k(t)}{dt^{q-1}}\,,q\in\{1,\dots,\theta\}, \tag{6}$$

і багатоточкові умови

$$\begin{cases}u_k(t_j)=\varphi_{k,j}, & j\in\{1,\dots,r\},-T\le t_1<\dots<t_r<0,\ \ 1\le r\le n,\\ u_k(t_j)=\varphi_{k,j}, & j\in\{r+1,\dots,\ell\},\ 0<t_{r+1}<\dots<t_\ell\le T,\ \ell=n+m-\theta.\end{cases} \tag{7}$$

Із гіперболічності рівняння (1) випливає, що корені рівнянь $L_1(\lambda,1)=0$ і $L_2(\mu,1)=0$ є простими. Позначимо їх через $\lambda_1,...,\lambda_n$ і $\mu_1,...,\mu_m$ відповідно.

Розв'язок рівняння (5) при $k\ne 0$ шукаємо у вигляді

$$u_k(t)=\begin{cases}\sum\limits_{s=1}^{n}C_s(k)e^{ik\lambda_s t}, & t<0,\\[2ex] \sum\limits_{s=1}^{m}C_{n+s}(k)e^{ik\mu_s t}, & t>0,\end{cases} \tag{8}$$

де $C_s(k)$ визначаються і системи рівнянь

$$\begin{cases}\sum\limits_{s=1}^{n}C_s(k)(ik\lambda_s)^{q-1}=\sum\limits_{s=1}^{m}C_{n+s}(k)(ik\mu_s)^{q-1}, & q\in\{1,\dots,\theta\},\\[2ex] \sum\limits_{s=1}^{n}C_s(k)e^{ik\lambda_s t_j}=\varphi_{k,j}, & j\in\{1,\dots,r\},\\[2ex] \sum\limits_{s=1}^{m}C_{n+s}(k)e^{ik\mu_s t_j}=\varphi_{k,j}, & j\in\{r+1,\dots,\ell\}.\end{cases}\qquad k\in Z\setminus\{0\}. \tag{9}$$

Визначник системи (9) зображується формулою

$$\Delta(k)=(ik)^{\theta-1}\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & -1 & \dots & -1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n & -\mu_1 & \dots & -\mu_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{\theta-1} & \dots & \lambda_n^{\theta-1} & -\mu_1^{\theta-1} & \dots & \mu_m^{\theta-1} \\ e^{ik\lambda_1 t_1} & \dots & e^{ik\lambda_n t_1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{ik\lambda_1 t_r} & \dots & e^{ik\lambda_n t_r} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{ik\mu_1 t_{r+1}} & \dots & e^{ik\mu_m t_{r+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & e^{ik\mu_1 t_\ell} & \dots & e^{ik\mu_m t_\ell} \end{vmatrix},\ k\in Z\setminus\{0\}.$$

При $k=0$ розв'язком задачі (5) – (7) є многочлени степенів n і m відповідно

$$u_0(t)=\begin{cases}\sum\limits_{s=1}^{n} C_s(0)t^{s-1}, & t<0,\\ \sum\limits_{s=1}^{m} C_{n+s}(0)t^{s-1}, & t>0,\end{cases}$$

коефіцієнти яких визначаються із системи, яку отримуємо з умов (5), (6). Визначник цієї системи позначимо через $\Delta(0)$.

Якщо виконується умова

$$\forall k\in Z \qquad \Delta(k)\neq 0, \tag{10}$$

то застосовуючи правило Крамера для знаходження розв'язків системи (9) та підставляючи отримані вирази у формули (8), встановлюємо, що задача (5) – (7) має єдиний розв'язок, який зображується рівністю

$$u_k(t)=\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{\ell}\dfrac{\Delta_{s+\theta,j}(k)\varphi_{k,s}}{\Delta(k)}e^{ik\lambda_j t}, & t<0,\\ \sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{s=1}^{\ell}\dfrac{\Delta_{s+\theta,n+j}(k)\varphi_{k,s}}{\Delta(k)}e^{ik\mu_j t}, & t>0,\end{cases}\qquad k\in Z\setminus\{0\}, \tag{11}$$

де $\Delta_{q,j}(k)$, $q\in\{\theta+1,\dots n+m\}$, $j\in\{1,\dots,n+m\}$ – алгебричне доповнення елемента, що стоїть на перетині q -го рядка та j -го стовпця у визначнику $\Delta(k)$. Таким чином враховуючи (4), (11) отримуємо формальне зображення розв'язку задачі (1) – (3)

$$u(t,x)=u_0(t)+\begin{cases}\sum\limits_{k\in Z\setminus\{0\}}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{\ell}\dfrac{\Delta_{s+\theta,j}(k)\varphi_{k,s}}{\Delta(k)}e^{ik(\lambda_j t+x)}, & t<0,\\ \sum\limits_{k\in Z\setminus\{0\}}\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{s=1}^{\ell}\dfrac{\Delta_{s+\theta,n+j}(k)\varphi_{k,s}}{\Delta(k)}e^{ik(\mu_j t+x)}, & t>0.\end{cases} \tag{12}$$

Збіжність ряду (12), взагалі кажучи, пов'язана з проблемою малих знаменників, оскільки величини $\Delta(k)$, $k \in Z \setminus \{0\}$, будучи відмінними від нуля, можуть набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості цілих k і спричиняти розбіжність (12).

Теорема 1. *Нехай виконується умова* (10) *та існує стала* $\omega \in R$ *така, що для всіх (крім скінченної кількості) цілих* k *виконується нерівність*

$$\left|\Delta(k)\right| > C_1(1+|k|)^{-\omega}. \tag{13}$$

Якщо $\varphi_j \in H_{q+\theta+\omega-1}$, $j \in \{1,\ldots,\ell\}$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (1) – (3). *Цей розв'язок неперервно залежить від функцій* φ_j, $j \in \{1,\ldots,\ell\}$.

Доведення. Із формул (11) на підставі нерівностей (13) отримуємо, що

$$\left|u_k^{(j)}(t)\right| \le C_2 \sum_{s=1}^{\ell} \left|\varphi_{k,s}\right| (1+|k|)^{\omega+\theta+j-1}, \quad j \in \{0,1,\ldots,\max\{n,m\}\},\ k \in Z \setminus \{0\}. \tag{14}$$

Із нерівностей (14) випливає, що для ряду (12) виконуються оцінки

$$\left\| u \in C^n([-T,0];H_q) \right\| \le C_3 \sum_{s=1}^{\ell} \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\varphi_{k,s}\right|^2 (1+|k|)^{2(\omega+\theta-1)}} = C_3 \sum_{s=1}^{\ell} \left\| \varphi_s; H_{q+\omega+\theta-1} \right\|,$$

$$\left\| u \in C^m([0,T];H_q) \right\| \le C_4 \sum_{s=1}^{\ell} \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\varphi_{k,s}\right|^2 (1+|k|)^{2(\omega+\theta-1)}} = C_4 \sum_{s=1}^{\ell} \left\| \varphi_s; H_{q+\omega+\theta-1} \right\|, \tag{15}$$

де C_3, C_4 – додатні сталі, які від k не залежать. Із отриманих оцінок (15) випливає твердження теореми.

4. Позначимо:

$$P_q(\lambda,k) = (\lambda - ik\lambda_1)\ldots(\lambda - ik\lambda_{n+q-r-1}),\ q \in \{1,\ldots,r\},$$

$$P_q(\mu,k) = (\mu - ik\mu_1)\ldots(\mu - ik\mu_{m+q-\ell-1}),\ q \in \{r+1,\ldots,\ell\},$$

$$\Lambda_q = (\lambda_{n+q-r} - \lambda_1)\ldots(\lambda_{n+q-r} - \lambda_{n+q-r-1}),\ q \in \{1,\ldots,r\},$$

$$M_q = (\mu_{m+q-\ell} - \mu_1)\ldots(\mu_{m+q-\ell} - \mu_{m+q-\ell-1}),\ q \in \{r+1,\ldots,\ell\}.$$

За допомогою метричного підходу встановлено твердження про можливість виконання нерівності (13).

Теорема 2. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* R^ℓ*) векторів* $\vec{t} \in [-T,0]^r \times [0,T]^{\ell-r}$ *нерівність (13) виконується для всіх (крім скінченної кількості) чисел* $k \in Z \setminus \{0\}$ *при* $\omega > r(2n-r-1)/2 + (\ell-r)(2m-\ell+r-1)/2 - \theta$.

Доведення. З огляду на лему Бореля-Кантеллі для доведення теореми досить встановити, що збіжним є ряд

$$\sum_{k \in Z} mes_{R^\ell} W(k), \tag{16}$$

де $W(k)$ множина тих векторів $\vec{t} \in [-T,0]^r \times [0,T]^{\ell-r}$, для яких нерівність, протилежна до нерівності (13), виконується при фіксованому $k \in Z \setminus \{0\}$. Щоб встановити збіжність ряду (16), доведемо, що для всіх $k \in Z \setminus \{0\}$ виконується оцінка

$$mes_{R^\ell} W(k) \le C_5 (1+|k|)^{-1-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0. \qquad (17)$$

Для цього запровадимо позначення: $\delta_q(k, t_1, \dots, t_q) -$ визначник, який отримується з визначника $\Delta(k, \vec{t})$ викреслюванням останніх $\ell - q$ рядків та останніх $\ell - r$ стовбців, а також $r - q$ стовбців, номери яких скдадають множину $\{n - r + q + 1, \dots, n\}$, $q \in \{1, \dots, r\}$; $\delta_q(k, t_1, \dots, t_q)$, $-$ визначник, який отримується з визначника $\Delta(k, \vec{t})$ викреслюванням останніх $\ell - q$ рядків та останніх $\ell - q$ стовбців $q \in \{r+1, \dots, \ell\}$, зрозуміло, що $\delta_\ell(k, t_1, \dots, t_\ell) = \Delta(k, \vec{t})$. Для кожного $k \in Z \setminus \{0\}$ розглянемо множини:

$$W_q(k) = \{\vec{t} \in [0,T]^n : |\delta_q(k, t_1, \dots, t_q)| < \nu_q(k), |\delta_{q-1}(k, t_1, \dots, t_{q-1})| \ge \nu_{q-1}(k)\},$$

де числа $\nu_q(k)$, $q \in \{1, \dots, \ell\}$, визначаються таким чином:

$$\nu_q(k) = (1+|k|)^{-q(2n-q-1)/2-\varepsilon_q}, \quad q \in \{1, \dots, r\},$$

$$\nu_q(k) = (1+|k|)^{-r(2n-r-1)/2-(q-r)(2m-q+r-1)/2-\varepsilon_q}, \quad q \in \{r+1, \dots, \ell\},\ 0 < \varepsilon_1 < \dots < \varepsilon_\ell .$$

Легко перевірити, що $W(k) \subset \bigcup_{q=1}^{\ell} W_q(k)$. Тому

$$mes_{R^\ell} W(k) \le \sum_{q=1}^{n} mes_{R^\ell} W_q(k). \qquad (18)$$

Оцінимо зверху міри Лебега множин $W_q(k, \vec{\tau}_q)$, $q \in \{1, \dots, \ell\}$, де $\vec{\tau}_q = (t_1, \dots, t_{q-1}, t_{q+1}, \dots, t_\ell)$, $d\vec{\tau}_q = dt_1 \dots dt_{q-1} dt_{q+1} \dots dt_\ell)$, $W_q(k, \vec{\tau}_q) = \{t_q \in [0,T] : \vec{t} \in W_q(k)\}$, $q \in \{1, \dots, \ell\}$.

Для цього розкладемо визначник $\delta_q(k, t_1, \dots, t_q)$ за елементами останнього рядка і до отриманої рівності застосуємо диференціальний вираз $P_q(\partial / \partial t_q, k)$. В результаті одержимо

$$P_q\left(\partial / \partial t_q, k\right) \delta_q(k, t_1, \dots, t_q) = (ik)^{n+q-r-1} \exp(i\mu_q k t_q) \delta_{q-1}(k, t_1, \dots, t_{q-1}) M_q, \quad q \in \{2, \dots, r\},$$

$$P_q\left(\partial / \partial t_q, k\right) \delta_q(k, t_1, \dots, t_q) = (ik)^{m+q-\ell-1} \exp(i\lambda_q k t_q) \delta_{q-1}(k, t_1, \dots, t_{q-1}) \Lambda_q, \quad q \in \{r+1, \dots, \ell\}, \qquad (19)$$

Зазначимо, що функція $\delta_q(k, t_1, \dots, t_q)$, $q \in \{1, \dots, \ell\}$, як функція змінної t_q (при фіксованих $t_1, \dots, t_{q-1}$), є квазімногочленом, модулі показників експонент якого не перевищують $T|k|$. Якщо $\vec{t} \in W_q(k)$, $q \in \{1, \dots, \ell\}$, то з формул (19) та означення множин $W_q(k)$ випливає, що

$$\forall t_q \in [0,T] \quad \left| P_q\left(\partial / \partial t_q, k\right) \delta_q(k, t_1, \dots, t_q) \right| \ge |\Lambda_q| (1+|k|)^{n+q-r-1} \nu_{q-1}(k), \quad q \in \{1, \dots, r\}, \qquad (20)$$

$\forall t_q \in [0,T] \quad \left| P_q\left(\partial / \partial t_q, k\right)\delta_q(k,t_1,\ldots,t_q)\right| \geq |M_q| (1+|k|)^{m+q-\ell-1}\nu_{q-1}(k), \quad q \in \{r+1,\ldots,\ell\}.$

Крім того, для кожного q, $q \in \{1,\ldots,r\}$, степінь многочлена $P_q(\lambda,k)$ за змінною λ дорівнює $n+q-r-1$, а для кожного q, $q \in \{r+1,\ldots,\ell\}$, степінь многочлена $P_q(\mu,k)$ за змінною μ дорівнює $m+q-\ell-1$. Оскільки модуль коефіцієнта при λ^{q-j-1}, $j \in \{0,1,\ldots,q-1\}$, в многочлені $P_q(\lambda,k)$, не перевищує $C_6(1+|k|)^j$, а модуль коефіцієнта при μ^{q-j-1}, $j \in \{0,1,\ldots,q-1\}$, в многочлені $P_q(\mu,k)$, не перевищує $C_7(1+|k|)^j$, то з оцінок (20) на підставі твердження леми 3 із [5] встановлюємо

$$mes_R W_q(k,\vec{\tau}_q) \leq C_{14}(1+|k|)\left(\frac{\nu_q(k)}{|k|^{n+q-r-1}\,\nu_{q-1}(k)}\right)^{\frac{1}{n+q-r-1}} \leq C_{15}(1+|k|)^{-1-\varepsilon_0},$$
$$q \in \{1,\ldots,r\}, k \in Z \setminus \{0\},$$

$$mes_R W_q(k,\vec{\tau}_q) \leq C_{16}(1+|k|)\left(\frac{\nu_q(k)}{|k|^{m+q-\ell-1}\,\nu_{q-1}(k)}\right)^{\frac{1}{m+q-\ell-1}} \leq C_{17}(1+|k|)^{-1-\varepsilon_0},$$
$$q \in \{r+1,\ldots,\ell\}, \tag{21}$$

де $\varepsilon_0 = \min\limits_{1\leq q\leq \ell}\{(\varepsilon_q - \varepsilon_{q-1})/(n+q-r-1)\}$.

Інтегруючи оцінки (21) за змінними $t_1,\ldots,t_{q-1},t_{q+1},\ldots,t_\ell$ та враховуючи нерівності (18) отримуємо

$$mes_{R^\ell} W(k) \leq C_{18}(1+|k|)^{-1-\varepsilon_0}, \quad k \in Z \setminus \{0\}. \tag{22}$$

Із оцінок (22) випливає збіжність ряду (17). Теорему доведено.

Із тверджень теореми 1 та теореми 2, випливає коректна розв'язність задачі (1) – (3) для майже всіх(стосовно міри Лебега) векторів складених із вузлів інтерполяції.

Література

1. Гельфанд И.М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // УМН. –1959. – Т. 3, вып. 3(87). – С. 3–19.
2. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981.
3. Джураев Т., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений парабологиперболического типа. – Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.
4. Золина Л.А. О краевой задаче для модельного уравнения гиперболо-параболического типа // Журн. вычислительной мат. и мат. физики. – 1966. – 6, № 6. – С. 991–1001.
5. Пташник Б.Й., Симотюк М.М. Багатоточкова задача для неізотропних диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2003. – 55, № 2. – С. 241–254.

6. Сабитов К.Б. К теории уравнений смешанного типа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. – 301 с.
7. Савка І.Я., Симотюк М.М. Задача спряження з інтегральною умовою за часовою змінною для мішаного рівняння параболо-гіперболічного типу // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2015. – 1 (28). – С. 72–77.
8. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Наука, 1970. – 296 с.
9. Стручина Г.М. Задача о сопряжении двух уравнений // Инженерно-физический журнал. – 1961. – 4(11). – С. 99–104.
10. Трикоми Ф. О линейных уравнениях в частных производных смешанного типа. – М.: ИЛ,1947. – 192 с.
11. Уфлянд Я. С. К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях // Инженерно-физический журнал. – 1964. – 7(1). – С. 89–92.
12. Kuz A.M., Ptashnyk B.Yo. A Problem with Condition Containing an Integral Term for a Parabolic-Hyperbolic Equation // Ukr. Math. J. – 2015. – 67 (5). – p. 723–734.
13. Rassias J.M. Lecture Notes on Mixed Type Partial Differential Equations, World Sci., 1990.
14. Rassias J.M. Mixed Type Equations, BSB Teubner, Leipzig, 90 (1986).
15. Schneider M. Introduction to partial differential equations of mixed type. Lecture Notes, No.1. Institute for Mathematical Sciences, University of Delaware, Newark, Del., (1977).

Стаття надійшла до редакційної колегії 19.09.2019 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., проф. ***Бігуном Я.Й.*** *(м. Чернівці),*
д.ф.-м.н., професором ***Ільківим В.С.*** *(м. Львів)*

CONJUGATION PROBLEM WITH MULTIPOINT CONDITIONS FOR MIXED HYPERBOLIC TYPE EQUATIONS

O. M. Medvid[1], I. Ya. Savka[1], I. R. Tymkiv[2]
[1]Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine; 79060, Lviv, Naukova Str. 3-b, e-mail: s-i@ukr.net
[2]Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas; 76019, Ivano-Frankivs'k, Karpatska Str.5;
ph: +380(342) 727131; e-mail: tymkiv_if@ukr.net

The conditions of correct solvability in the Sobolev spaces of the conjugation problem with local multipoint conditions and periodic conditions for higher order mixed hyperbolic type equations is obtained. It has been proved that these conditions fulfill for almost all (with respect to the Lebesgue measure) vectors made up of the nodes of multipoint conditions.

Key words: *mixed equation, hyperbolic equation, conjugation conditions, multipoint conditions, small denominator, Lebesgue measure.*