УДК 517.98

ПЕРІОДИЧНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКОЇ СИСТЕМИ ДЕКІЛЬКОХ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НЕПАРНОГО ПОРЯДКУ

А. М. Краснодембський

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15; тел. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua

У статті встановлено умови збіжності послідовностей, що визначають розв'язки з періодичними компонентами деякої системи декількох нелінійних диференціальних рівнянь непарного порядку.

Ключові слова: *система декількох нелінійних диференціальних рівнянь непарного порядку, умови збіжності, періодичність розв'язків.*

Раніше отримані результати ([3]) для системи двох нелінійних диференціальних другого порядку узагальнені для системи декількох нелінійних диференціальних рівнянь непарного порядку.

Є система диференціальних рівнянь

$$Y_i^{(2k+1)} = f_i\left(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(2k)}; \dots; y_n, y_n', \dots, y_n^{(2k)}\right) \quad (i = 1,2\dots, n), \tag{1}$$

в якій неперервні функції $f_i\left(x, u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \dots u_{2k-1}^{(1)}; \dots; u_0^{(n)}, u_1^{(n)}, \dots, u_{2k-1}^{n}\right)$ $(i = 1,2,\dots, n)$ задовольняють умови:

1. $$f_i\left(x+T, u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \dots, u_{2k}^{(1)}; \dots; u_0^{(n)}, u_1^{(n)}, \dots, u_{2k}^{(n)}\right) \equiv$$ $$\equiv f_i\left(x, u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \dots, u_{2k}^{(1)}; \dots; u_0^{(n)}, u_1^{(n)}, \dots, u_{2k}^{(n)}\right);$$
2. $$f_i\left(\alpha - x, u_0^{(1)}, -u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, -u_3^{(1)} \dots, u_{2k}^{(1)}; \dots; u_0^{(n)}, -u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, -u_3^{(1)} \dots, u_{2k}^{(n)}\right) \equiv$$ $$\equiv -f_i\left(x, u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \dots, u_{2k}^{(1)}; \dots; u_0^{(n)}, u_1^{(n)}, \dots, u_{2k}^{(n)}\right);$$
3. $$\left|f_i\left(x, u_{02}^{(1)}, u_{12}^{(1)}, \dots, u_{2k,2}^{(1)}; \dots; u_{02}^{(n)}, u_{12}^{(n)}, \dots, u_{2k,2}^{(n)}\right) - \right.$$ $$\left. - f_i\left(x, u_{01}^{(1)}, u_{11}^{(1)}, \dots, u_{2k,1}^{(1)}; \dots; u_{01}^{(n)}, u_{11}^{(n)}, \dots, u_{2k,1}^{(n)}\right)\right| \le$$ $$\le K_0^{(1)}\left|u_{02}^{(1)} - u_{01}^{(1)}\right| + K_1^{(1)}\left|u_{12}^{(1)} - u_{11}^{(1)}\right| + \dots + K_{2k}^{(1)}\left|u_{2k,2}^{(1)} - u_{2k,1}^{(1)}\right| +$$ $$+ \dots + K_0^{(n)}\left|u_{02}^{(n)} - u_{01}^{(n)}\right| + K_1^{(n)}\left|u_{12}^{(n)} - u_{11}^{(n)}\right| + \dots + K_{2k}^{(n)}\left|u_{2k,2}^{(n)} - u_{2k,1}^{(n)}\right|.$$

Згідно з попереднім $([1],[2])$ диференціальне рівняння

$$y^{(m+1)} = \varphi(x),$$

де $\varphi(x) \in C; \varphi(x+T) \equiv \varphi(x); \int_0^T \varphi(x)dx = 0$ має неперервний, періодичний (період T) розв'язок $y=\overline{y}(x)$ ($\overline{y}(0)=y_0$), котрий можна записати у вигляді

$$\overline{y}(x)=\frac{1}{m!}\int_0^x (x-t)^m\varphi(t)dt+\left[\frac{A_1^{(1)}}{T}\int_0^T t\varphi(t)dt\right]x^m+\left[A_2^{(1)}\int_0^T t\varphi(t)dt+\right.$$
$$\left.+\frac{A_2^{(2)}}{T}\int_0^T t^2\varphi(t)dt\right]x^{m-1}+\ldots+\left[A_m^{(1)}T^{m-2}\int_0^T t\varphi(t)dt+A_m^{(2)}T^{m-3}\int_0^T t^2\varphi(t)dt+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{A_m^{(m)}}{T}\int_0^T t^m\varphi(t)dt\right]x+y_0,$$

в якому коефіцієнти $A_1^{(1)}, A_2^{(1)},\ldots, A_m^{(m)}$ є задовольняють співвідношення

$$\begin{cases} A_i^{(i)}+A_{i+1}^{(i)}+\ldots+A_n^{(i)}=(-1)^{i+1}\dfrac{C_m^i}{m!}\ (i=1,2,\ldots,m); \\ (n+1-i)\,A_i^{(i)}+(m-i)\,A_{i+1}^{(i)}+\ldots+2A_{m-1}^{(i)}=(-1)^{i+1}\dfrac{C_{m-1}^i}{(m-1)!}\ (i=1,2,\ldots,m-1); \\ (m+1-i)(m-i)\,A_i^{(i)}+(m-i)(m-1-i)\,A_{i+1}^{(i)}+\ldots+3\cdot 2\,A_{m-2}^{(i)}=(-1)^{i+1}\dfrac{C_{m-2}^i}{(m-2)!} \\ (i=1,2,\ldots,m-2); \end{cases}$$

$$m!\,A_1^{(1)}=1.$$

Якщо, крім того, $\varphi(\alpha-x)=-\varphi(x)$, то $\overline{y}(\alpha-x)=\overline{y}(x)$.

З приведеної системи співвідношень послідовно знаходимо:

$$A_i^{(i)}=(-1)^{i+1}\frac{1}{(m+1-i)i!}\ (i=1,2,\ldots,m);$$

$$A_{i+1}^{(i)}=\frac{1}{(m-1)!}\left[(-1)^{i+1}\frac{1}{i!}-\frac{(m+1-i)!}{2!}A_i^{(i)}\right]\ (i=1,2,\ldots,m-1);$$

$$A_{i+2}^{(i)}=\frac{1}{(m-1-i)!}\left[(-1)^{i+1}\frac{1}{i!2!}-\frac{(m+1-i)!}{3}A_i^{(i)}-\frac{(m-i)!}{2!}A_{i+1}^{(i)}\right]\ (i=1,2,\ldots,m-2);$$

$$A_{m-1}^{(i)}=\frac{1}{2!}\left[(-1)^{i+1}\frac{1}{i!(m-2)!}-\frac{(m+1-i)!}{(m-i)!}A_i^{(i)}-\frac{(m-i)!}{(m-1-i)!}A_{i+1}^{(i)}-\ldots-\frac{3!}{2!}A_{m-2}^{(i)}\right](i=1,2);$$

$$A_n^{(1)}=\frac{1}{(m-1)!}-A_1^{(1)}-A_2^{(1)}-\ldots-A_{m-1}^{(1)}.$$

Надалі, використані позначення $(m=2k)$:

$$\max_{0\le x\le T}\int_0^T\left|\frac{A_1^{(1)}}{T}tx^{2k}+A_2^{(1)}tx^{2k-1}+\ldots+\frac{A_{2k}^{(2k)}}{T}t^{2k}x\right|dt+\frac{1}{(2k+1)!}T^{2k+1}=N_0;$$

$$\max_{0\le x\le T}\int_0^T\left|2k\frac{A_1^{(1)}}{T}tx^{2k-1}+(2k-1)A_2^{(1)}tx^{2k-2}+\ldots+2\frac{A_{2k}^{(2k)}}{T}t^{2k}\right|dt+\frac{1}{(2k)!}T^{2k}=N_1;$$

……………………………………………………………………………

$$\max_{0\le x\le T}\int_0^T\left|\frac{1}{T}t\right|dt+T=\frac{3}{2}T=N_{2k};$$

$$K_i^{(1)}+K_i^{(2)}+\ldots+K_i^{(n)}=K_i\ (i=0,1,\ldots,2k).$$

Теорема 1. Якщо $q=K_0N_0+K_1N_1+\ldots+K_{2k}N_{2k}<1,$ то система (1) має n-параметричне сімейство розв’язків $y_i=\overline{y_i}(x)(\overline{y}_i(0)=y_{i0}),$ що $\overline{y_i}(x)\in C;\ \overline{y_i}(x+T)=\overline{y_i}(x);\quad \overline{y_i}(\alpha-x)=-\overline{y_i}(x)\ (i=1,2,\ldots,n).$

Доведення. Складаємо послідовності

$$y_{il}(x)=\frac{1}{(2k)!}\int_0^x(x-t)^{2k}\delta_{il-1}(t)dt+\left[\frac{A_1^{(1)}}{T}\int_0^T t\delta_{il-1}(t)dt\right]x^{2k}+(2x-1)\left[A_2^{(1)}\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^T t\delta_{il-1}(t)dt+\frac{A_2^{(2)}}{T}\int_0^T t^2\delta_{il-1}(t)dt\right]x^{2k-1}+\ldots+\left[A_{2k}^{(1)}T^{2k-2}\int_0^T t\delta_{il-1}(t)dt+A_{2k}^{(2)}T^{2k-3}\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^T t^2\delta_{il-1}(t)dt+\ldots+\frac{A_{2k}^{(2k)}}{T}\int_0^T t^{2k}\delta_{il-1}(t)dt\right]x+y_{i0}\ (i=1,2,\ldots,n;l=1,2,\ldots).$$

Тут $\delta_{il-1}(t)=f_i(t,y_{il-1}(t),y'_{il-1}(t),\ldots,y_{il-1}^{(2k)}(t);\ldots;y_{nl-1}(t),y'_{nl-1}(t),\ldots,y_{nl-1}^{(2k)}(t))$ $(i=1,2,\ldots,n;\ l=1,2,\ldots).$

Як було вказано раніше $y_{il}(x)$ є неперервні, періодичні (періоду T) функції, що $y_{il}(\alpha-x)\equiv y_{il}(x)\ (i=1,2,\ldots,n;l=1,2,\ldots).$

Маємо:

$$y'_{il}(x)=\frac{1}{(2k-1)!}\int_0^x(x-t)^{2k-1}\delta_{il-1}(t)dt+2k\left[\frac{A_1^{(1)}}{T}\int_0^T t\delta_{il-1}(t)dt\right]x^{2k-1}+$$

$$+(2k-1)\left[A_2^{(1)}\int_0^T t\delta_{il-1}(t)dt+\frac{A_2^{(2)}}{T}\int_0^T t^2\delta_{il-1}(t)dt\right]x^{2k-2}+\ldots+$$

$$+2\left[A_{2k}^{(1)}T^{2k-2}\int_0^T t\delta_{il-1}(t)dt+A_{2k-1}^{(2)}T^{2k-3}\int_0^T t^2\delta_{il-1}(t)dx+\ldots+\frac{A_{2k}^{(2k)}}{T}\int_0^T t^{2k}\delta_{il-1}(t)dt\right];$$

$$y_{il}^{(2k)}(x)=\int_0^x\delta_{il-1}(t)dt+\int_0^T\frac{1}{T}\delta_{il-1}(t)dt;\ (i=1,2,\ldots,n;\ l=1,2,\ldots)$$

Нехай:

$$\max_{0\le x\le T}f_i(x,y_{10},0,\ldots0;\ldots y_{n0},0,\ldots,0)=M.\ (i=1,2,\ldots,n).$$

Приймаючи до уваги періодичність (періоду T) приведених послідовностей, дістанемо:
$\left|y_{i2}-y_{i1}\right|\leq MN_0;\ \left|y'_{i1}\right|\leq MN_1;...;\left|y_{i2}^{(2k)}\right|\leq MN_{2K}\quad (i=1,2,...,n).$

Далі, отримаємо:

$$\left|y_{i2}-y_{i1}\right|\leq\Big(K_0^{(1)}MN_0+K_1^{(1)}MN_1+...+K_{2k}^{(1)}MN_{2k}+...+$$
$$+K_0^{(2)}MN_0+K_1^{(2)}MN_1+...+K_{2k2}^{(2)}MN_{2k}+...+K_0^{(n)}MN_0+K_1^{(n)}MN_1+...+$$
$$+K_{2k}^{(n)}MN_{2k}\Big)N_0=\left(K_0N_0+K_1N_1+...+K_{2k}N_{2k}\right)MN_0=MN_0q;\ (i=1,2,...,n);$$
$$\left|y'_{i2}-y'_{i1}\right|\leq MN_1q;...;\left|y_{i2}^{(2k)}-y_{i1}^{(2k)}\right|\leq MN_{2k-2}q.(i=1,2,...,n).$$

Припустимо, що
$$\left|y_{il+1}-y_{il}\right|\leq MN_0q^l;\ \left|y'_{il+1}-y'_{il}\right|\leq MN_1q^l;...;\left|y_{il+1}^{(2k)}-y_{il}^{(2k)}\right|\leq MN_{2k}q^l.\ (i=1,2,...,n)$$

Тоді
$$\left|y_{il+2}-y_{il+1}\right|\leq\Big(K_0^{(1)}MN_0q^l+K_1^{(1)}MN_1q^l+...+K_{2k}^{(1)}MN_{2k}q^l+K_0^{(2)}\times$$
$$\times MN_0q^l+K_1^{(2)}MN_{2k}q^l+K_{2k}^{(2)}MN_{2k}q^l+...+K_0^{(n)}MN_0q^l+K_1^{(n)}MN_1q^l+$$
$$+...+K_{2k}^{(n)}MN_{2k}q^l\Big)N_0=MN_0q^{l+1};\ (i=1,2,...,n)$$
$$\left|y'_{il+2}-y'_{il+1}\right|\leq MN_1q^l;...;\left|y_{il+2}^{(2k)}-y_{il+1}^{(2k)}\right|\leq MN_{2k}q^{l+1};\ (i=1,2,...,n).$$

Згідно з методом математичної індукції ряди
$$\left|y_{i0}\right|+\left|y_{i1}-y_{i0}\right|+\left|y_{i2}-y_{i1}\right|+...+\left|y_{il+1}-y_{il}\right|+...\quad(i=1,2,...,n)$$
мажоруються геометричною прогресією з знаменником $q<1$.

Отже, послідовності (2) збігаються рівномірно, тобто існують границі
$$\lim_{l\to\infty}y_{il}(x)=\overline{y_i}(x)\ (i=1,2,...,n),$$
де $\overline{y_i}(x)$ є неперервні, періодичні (періоду T) функції, що
$\overline{y_i}(\alpha-x)=\overline{y_i}(x)\ (i=1,2,...,n).$

Переходячи в послідовностях (2)до границі при $l\to\infty$, дістанемо:
$$\overline{y_i}(x)=\frac{1}{(2k)!}\int_0^x(x-t)^{2k}\delta_i(t)dt+\left[\frac{A_1^{(1)}}{T}\int_0^T t\delta_i(t)dt\right]x^{2k}+\Bigg[A_2^{(1)}\int_0^T t\delta(t)dt+$$
$$+\frac{A_2^{(2)}}{T}\int_0^T t^2\delta_i(t)dt-\Bigg]x^{2k-1}+...+\Bigg[A_{2k}^{(1)}T^{2k-2}\int_0^T t\delta_i(t)dt+A_{2k}^{(2)}T^{2k-3}\int_0^T t^2\delta_i(t)dt+...+$$
$$+\frac{A_{2k}^{(2k)}}{T}\int_0^T t^{2k}\delta_i(t)dt-\Bigg](i=1,2,...,n),$$
де $\delta_i(t)=f_i\Big(t,\overline{y}_1(t),\overline{y'_1}(t),...,y_1^{(2k)}(t);...;\overline{y}_n(t),\overline{y'}_n(t),...,\overline{y}_n^{(2k)}(t)\Big)\ (i=1,2,...,n).$

Значить, $y_i=\overline{y}_i(x)\ (i=1,2,...,n)$ є розв’язок системи (1).

Теорема доведена.

Теорема 2. Якщо $q = K_0N_0 + K_1N_1 + ... + K_{2k-2}N_{2k-2} + K_{2k-1}N_{2k-1} < 1$ і $y_i = \overline{y_i}(x), z_i = \overline{z_i}(x)\ (i = 1,2,...,n)$ є неперервні, періодичні (періоду T) розв'язки системи (1), що $\bar{y}_i(0) = \bar{z}_i(0) = y_{i0}\ (i = 1,2,...,n)$, то $\bar{y}_i(x) \equiv \bar{z}_i(x)\ (i = 1,2,...,n)$.

Доведення. Розв'язок $z_i = \overline{z_i}(x)\ (i = 1,2,...,n)$ системи (1) можна запишемо у вигляді

$$\overline{z_i}(x) = \frac{1}{(2k)!}\int_0^x (x-t)^{2k}\varDelta_i(t)dt + \left[\frac{A_1^{(1)}}{T}\int_0^T t\varDelta_i(t)dt\right]x^{2k} +$$

$$+\left[A_2^{(1)}\int_0^T t\varDelta_i(t)dt + \frac{A_2^{(2)}}{T}\int_0^T t^2\varDelta_i(t)dt\right]x^{2k-1} + ... + \left[A_{2k}^{(1)}T^{2k-2}\int_0^T t\varDelta_i(t)dt +\right.$$

$$\left. + A_{2k}^{(2)}T^{2k-3}\int_0^T t^2\varDelta_i(t)dt + ... + \frac{A_{2k}^{(2k)}}{T}\int_0^T t^{2k}\varDelta_i(t)dt - \right]x + y_{i0}\ (i = 1,2,...,n),$$

де $\varDelta_i(t) = f_i\left(t, \overline{z}_1(t), \overline{z_1'}(t), ..., \overline{z}_1^{(2k)}(t); ...; \overline{z}_n(t), \overline{z'}_n(t), ..., \overline{z}_n^{(2k)}(t)\right)(i = 1,2,...,n)$.

Нехай

$$\max_{0\le x\le T}\left|f_i\left(x, \overline{z}_1(x), \overline{z_1'}(x), ..., \overline{z}_1^{(2k)}(x); ...; \overline{z}_n(x), \overline{z'}_n(x), ..., \overline{z}_n^{(2k)}(x)\right)\right| = L\ (i = 1,2,...,n).$$

Приймаючи до уваги викладене вище, знаходимо:

$$\left|z_i' - y_{il}\right| \le LN_0q^l\ (i = 1,2,...,n;\ l = 0,1,2,...).$$

Оскільки $q < 1$, то звідси слідує:

$$\lim_{l\to\infty} y_{il}(x) = \overline{z}_i(x);\ \overline{y}_i(x) \equiv \overline{z}_i(x)\ (i = 1,2,...,n).$$

Теорема доведена.

Література

1. Краснодембський А.М. ДАН УРСР / А.М.Краснодембский.– 1962. – 10.
2. Краснодембский А.М. Записки мех.-мат. ф-та ХГУ и Харьковского матем. Общества / А.М.Краснодембский. – 1964. – Т.XXX, сер.4.
3. Краснодембський А.М. Періодичність розв'язків деякої системи декількох нелінійних диференціальних рівнянь непарного порядку / А.М.Краснодембський // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – Івано-Франківськ, 2013. – №1(21). – С. 45-50.

Стаття надійшла до редакційної колегії 20.12.2015 р.
Рекомендовано до друку д.т.н., професором ***Мойсишиним В.М.***
д.ф.-м.н., доцентом ***Королем І.І.*** *(м. Ужгород)*

PERIODICITY OF DECISIONS OF SOME SYSTEM A FEW NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUALIZATIONS OF ODD ORDER

A. M. Krasnodembskyy
Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivsk, Carpathians str., 15;
ph. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua

The terms of convergence of sequences, which determine the upshots with the periodic components of some system of a few nonlinear differential equalizations of odd order are set in the article.

Key words: *system of a few nonlinear differential equalizations of odd order, terms of convergence, periodicity of decisions.*