УДК 517.53

ЗРОСТАННЯ АБСОЛЮТНО ЗБІЖНИХ У ПІВПЛОЩИНІ РЯДІВ ДІРІХЛЕ В ТЕРМІНАХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ТИПІВ

Т. Я. Глова

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України; 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3б; e-mail: hlova_taras@ukr.net

Нехай $A\in(-\infty,+\infty)$. *Встановлено необхідну і достатню умову на невід'ємну зростаючу до* $+\infty$ *послідовність* (λ_n), *за якої існує опукла зростаюча до* $+\infty$ *на* $(-\infty,A)$ *функція* Φ *така, що для кожного абсолютно збіжного у півплощині* $Res<A$ *ряду Діріхле вигляду* $F(s)=\sum a_n e^{s\lambda_n}$, $s=\sigma+it$, *виконується рівність*

$$\varlimsup_{\sigma\uparrow A}\frac{lnsup\{|F(s)|:Res=\sigma\}}{\Phi(\sigma)}=\varlimsup_{\sigma\uparrow A}\frac{lnmax\{|a_n|e^{\sigma\lambda_n}:n\ge 0\}}{\Phi(\sigma)}.$$

Ключові слова: *ряд Діріхле, максимум модуля, максимальний член, узагальнений тип*

1. Вступ

Нехай N_0 – множина невід'ємних цілих чисел, Λ – клас невід'ємних зростаючих до $+\infty$ послідовностей $\lambda=(\lambda_n)_{n\in\mathrm{N}_0}$, $A\in(-\infty,+\infty]$, а Ω_A – клас опуклих на $(-\infty,A)$ функцій Φ таких, що $\Phi(\sigma)\to+\infty$ і $\Phi'_+(\sigma)\to+\infty$, якщо $\sigma\uparrow A$.

Для послідовності $\lambda\in\Lambda$ через $\Delta_A(\lambda)$ позначимо клас абсолютно збіжних у півплощині $\{s:Res<A\}$ рядів Діріхле вигляду

$$F(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{s\lambda_n},\quad s=\sigma+it. \tag{1}$$

Максимум модуля і максимальний член ряду Діріхле $F\in\Delta_A(\lambda)$ вигляду (1) визначимо для всіх $\sigma<A$ відповідно за рівностями

$$M(\sigma,F)=\sup\{|F(s)|:Res=\sigma\},\quad \mu(\sigma,F)=\max\{|a_n|e^{\sigma\lambda_n}:n\in\mathrm{N}_0\}.$$

Якщо $\Phi\in\Omega_A$ і $F\in\Delta_A$, то першу з величин

$$T_\Phi(F)=\varlimsup_{\sigma\uparrow A}\frac{\ln M(\sigma,F)}{\Phi(\sigma)},\quad t_\Phi(F)=\varlimsup_{\sigma\uparrow A}\frac{\ln\mu(\sigma,F)}{\Phi(\sigma)}$$

називатимемо Φ-типом ряду F. Поняття Φ-типу є узагальненням класичного поняття типу абсолютно збіжного в X ряду Діріхле (див. [1, 2]).

В роботах [3, 4] розглядалась задача про встановлення умов виконання рівності $T_\Phi(F) = t_\Phi(F)$, яка дозволяє виразити Φ-тип ряду Діріхле $F \in \Delta_A(\lambda)$ вигляду (1) через послідовність (a_n) його коефіцієнтів. Найзагальнішим результатом у цьому напрямі є наступна теорема ([4]).

Теорема A. *Нехай* $A \in (-\infty, +\infty]$, $\lambda \in \Lambda$, *а* $\Phi \in \Omega_A$. *Для того, щоб* $T_\Phi(F) = t_\Phi(F)$ *для кожного ряду Діріхле* $F \in \Delta_A(\lambda)$, *необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\forall B > 0: \qquad \ln n_\lambda(B\Phi'_+(\sigma)) = o(\Phi(\sigma)), \quad \sigma \uparrow A, \tag{2}$$

де $n_\lambda(x) = \sum_{\lambda_n \le x} 1$ *– лічильна функція послідовності* λ.

Нехай $\lambda \in \Lambda$ – довільна послідовність. Розглянемо довільну неперервну зростаючу на $[0, +\infty)$ функцію l таку, що $\ln n \le l(\lambda_n)$ для всіх $n \in \mathrm{N}_0$, і нехай $\varphi(x) = l(x^2)$, $x \ge 0$. Функція φ є неперервною зростаючою до $+\infty$ на $[0, +\infty)$, а тому для деякої $\Phi \in \Omega_{+\infty}$ маємо $\Phi'(x) = \varphi^{-1}(x)$, $x \ge x_0$. Тоді для кожного $B > 0$ отримуємо

$$\ln n_\lambda(B\Phi'(x)) \le l(B\Phi'(x)) \le l((\Phi'(x))^2) = \varphi(\Phi'(x)) = x = o(\Phi(x)), \quad x \to +\infty,$$

тобто виконується умова (2) (з $A = +\infty$). Звідси і з теореми A випливає наступне твердження.

Теорема B. *Нехай* $A = +\infty$. *Тоді для довільної послідовності* $\lambda \in \Lambda$ *існує функція* $\Phi \in \Omega_A$ *така, що для кожного ряду Діріхле* $F \in \Delta_A(\lambda)$ *виконується рівність* $T_\Phi(F) = t_\Phi(F)$.

У даній роботі покажемо, що у випадку $A < +\infty$ теорема B не є правильною. Більше того, у цьому випадку вкажемо необхідну і достатню умову на послідовність $\lambda \in \Lambda$, за якої існує функція $\Phi \in \Omega_A$ така, що для кожного ряду Діріхле $F \in \Delta_A(\lambda)$ виконується рівність $T_\Phi(F) = t_\Phi(F)$. Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай* $A \in (0, +\infty)$, *а* $\lambda \in \Lambda$. *Для того, щоб існувала функція* $\Phi \in \Omega_A$ *така, що для кожного ряду Діріхле* $F \in \Delta_A(\lambda)$ *виконується рівність* $T_\Phi(F) = t_\Phi(F)$, *необхідно і досить, щоб*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\lambda_n} < +\infty. \tag{3}$$

Теорема 1 є безпосереднім наслідком з теореми A і наступного твердження.

Теорема 2. *Нехай* $A \in (0,+\infty)$, *а* $\lambda \in \Lambda$. *Для того, щоб існувала функція* $\Phi \in \Omega_A$ *така, що виконується умова (2), необхідно і досить, щоб виконувалась умова (3).*

2. Допоміжні результати

Насамперед доведемо декілька лем, які будуть потрібні для доведення теореми 2.

Лема 1. *Нехай* $A \in (0,+\infty]$, $\Phi \in \Omega_A$, $x_0 = \inf\{x \in (-\infty, A) : \Phi'_+(x) > 0\}$, $t_0 = \inf\{\Phi(x) : x \in (x_0, A)\}$ *і*

$$\alpha(t) = \Phi'_+(\Phi^{-1}(t)), \quad t > t_0. \tag{4}$$

Тоді функція α *є додатною неспадною неперервною справа на* $(t_0,+\infty)$ *і для довільного фіксованого* $t_1 > t_0$ *інтеграл*

$$\int_{t_1}^{+\infty} \frac{dt}{\alpha(t)} \tag{5}$$

збігається (розбігається) тоді і лише тоді, коли $A < +\infty$ *(* $A = +\infty$ *).*

Доведення. Оскільки $\Phi'_+(x) > 0$ на $(x_0,+\infty)$, то функція Φ зростає на $(x_0,+\infty)$. Крім того, Φ неперервна на $(-\infty, A)$. Отже, обернена функція Φ^{-1} визначена на інтервалі $(t_0,+\infty)$ і є на ньому неперервною зростаючою функцією. Звідси випливає, що α – додатна неспадна неперервна справа на $(t_0,+\infty)$ функція.

Якщо $t_1 > t_0$ і $x_1 = \Phi^{-1}(t_1)$, то за (4) маємо

$$\int_{t_1}^{+\infty} \frac{dt}{\alpha(t)} = \int_{x_1}^{A} \frac{d\Phi(x)}{\alpha(\Phi(x))} = \int_{x_1}^{A} \frac{\Phi'_+(x)dx}{\Phi'_+(x)} = \int_{x_1}^{A} dx = A - x_1,$$

а тому інтеграл (5) збігається (розбігається) тоді і лише тоді, коли $A < +\infty$ ($A = +\infty$). Ω

Зауваження 1. *Лема 1 залишиться правильною, якщо в ній* Φ'_+ *замінити на* Φ'_-, *а відносно функції* α *стверджувати, що вона є неперервною зліва, а не справа.*

Лема 2. *Нехай* $A \in (0,+\infty]$, $t_0 \in (-\infty,+\infty)$, *а* α *– додатна неспадна неперервна справа на* $(t_0,+\infty)$ *функція така, що для деякого фіксованого* $t_1 > t_0$ *інтеграл (5) збігається у випадку* $A < +\infty$ *і розбігається у випадку* $A = +\infty$. *Тоді існує функція* $\Phi \in \Omega_A$, *для якої виконується рівність (4).*

Доведення. Для всіх $t > t_0$ покладемо

$$\beta(t) = A - \int_t^{+\infty} \frac{dy}{\alpha(y)}, \quad \text{якщо } A < +\infty; \qquad \beta(t) = \int_{t_1}^{t} \frac{dy}{\alpha(y)}, \quad \text{якщо } A = +\infty.$$

Тоді функція β є неперервною зростаючою до A на $(t_0,+\infty)$, причому

$$\beta'_+(t) = \frac{1}{\alpha(t)}, \quad t > t_0.$$

Тому для всіх $x \in (x_0, A)$, де $x_0 = \inf\{\beta(t) : t > t_0\}$, визначена обернена функція $\Phi(x) = \beta^{-1}(x)$. Ця функція зростає до $+\infty$ на (x_0, A) і для неї маємо

$$\Phi'_+(x) = \frac{1}{\beta'_+(\Phi(x))} = \alpha(\Phi(x)), \quad x \in (x_0, A), \tag{6}$$

звідки легко отримуємо (4). Крім того, з (6) випливає, що функція Φ'_+ є зростаючою до $+\infty$ на (x_0, A). Отже, якщо $x_0 = -\infty$, то $\Phi \in \Omega_A$. Якщо ж $x_0 > -\infty$, то, скориставшись опуклістю функції Φ на (x_0, A), маємо $t_0 = \Phi(x_0 + 0) > -\infty$, а тому функцію Φ можна довизначити до функції з класу Ω_A, поклавши, наприклад, $\Phi(x) = t_0$ для всіх $x \le x_0$. Ω

Зауваження 2. *Якщо в лемі 2 вважати функцію α неперервною зліва, а не справа, то можна стверджувати, що існує функція $\Phi \in \Omega_A$, для якої замість (4) виконується рівність $\alpha(t) = \Phi'_-(\Phi^{-1}(t))$, $t > t_0$.*

Лема 3. *Нехай α – додатна неспадна на $[a,+\infty)$ функція, для якої*

$$\int_a^{+\infty} \frac{dt}{\alpha(t)} < +\infty. \tag{7}$$

Тоді існує додатна неспадна на $[a,+\infty)$ функція β така, що $\beta(t) = o(\alpha(t))$, якщо $t \to +\infty$, і $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{\beta(t)} < +\infty$.

Лема 3 є добре відомою. Зокрема, як зауважив В. Бергвайлер [5], для її доведення досить покласти $\beta(t) = \sup\{\alpha(y)\sqrt{\gamma(y)} : y \in [a,t]\}$, $t \ge a$, де

$$\gamma(y) = \int_y^{+\infty} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}, \quad y \ge a.$$

Тоді, очевидно, β є додатною неспадною на $[a,+\infty)$ функцією. Оскільки $\gamma(y) \to 0$, $y \to +\infty$, то для довільного фіксованого $\varepsilon > 0$ існує $y_0 \ge a$ таке, що $\gamma(y) \le \varepsilon$ для всіх $y \ge y_0$. Тому для всіх $t \ge y_0$ маємо

$$\beta(t) \le \max\{\alpha(y_0)\gamma(a), \alpha(t)\varepsilon\},$$

звідки отримуємо

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\beta(t)}{\alpha(t)}\le\varepsilon.$$

З довільності $\varepsilon>0$ випливає співвідношення $\beta(t)=o(\alpha(t))$, $t\to+\infty$. Крім того,

$$\int_a^{+\infty}\frac{dt}{\beta(t)}\le\int_a^{+\infty}\frac{dt}{\alpha(t)\sqrt{\gamma(t)}}=-\int_a^{+\infty}\frac{d\gamma(t)}{\sqrt{\gamma(t)}}=\int_0^{\gamma(a)}\frac{dx}{\sqrt{x}}<+\infty.$$

Лема 4. *Нехай α – додатна неспадна на $[a,+\infty)$ функція, для якої виконується (7). Тоді існує неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[a,+\infty)$ функція γ така, що $\gamma(a)=a$, $\gamma(t)=o(t)$, якщо $t\to+\infty$, і* $\int_a^{+\infty}\frac{dt}{\alpha(\gamma(t))}<+\infty$.

Доведення. Згідно з лемою 3, для функції α існує додатна неспадна на $[a,+\infty)$ функція β така, що $\beta(t)=o(\alpha(t))$, $t\to+\infty$, і $\int_a^{+\infty}\frac{dt}{\beta(t)}<+\infty$. Для всіх $t\ge a$ покладемо

$$\eta(t)=\int_a^t\frac{\alpha(\tau)}{\beta(\tau)}d\tau+a.$$

Функція η є неперервною зростаючою до $+\infty$ на $[a,+\infty)$, причому $\eta(a)=a$ і $t=o(\eta(t))$, $t\to+\infty$. Нехай $\gamma=\eta^{-1}$. Тоді $\gamma(a)=a$, γ – неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[a,+\infty)$ функція і $\gamma(t)=o(t)$, $t\to+\infty$. Крім того,

$$\int_a^{+\infty}\frac{dt}{\alpha(\gamma(t))}=\int_a^{+\infty}\frac{d\eta(y)}{\alpha(y)}=\int_a^{+\infty}\frac{dy}{\beta(y)}<+\infty.$$

Лему доведено. Ω

Безпосереднім наслідком з лем 3 і 4 є таке твердження.

Лема 5. *Нехай α – додатна неспадна на $[a,+\infty)$ функція, що задовольняє (7). Тоді існують додатна неспадна на $[a,+\infty)$ функція β, для якої $\beta(t)=o(\alpha(t))$, $t\to+\infty$, і неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[a,+\infty)$ функція γ, для якої $\gamma(a)=a$ і $\gamma(t)=o(t)$, $t\to+\infty$, такі, що* $\int_a^{+\infty}\frac{dt}{\beta(\gamma(t))}<+\infty$.

3. Доведення теореми 2

Достатність. Припустимо, що виконується умова (3), і нехай α – неперервна зростаюча на $[0,+\infty)$ функція така, що $\alpha(\ln n)=\lambda_n$, $n\in\mathrm{N}$. Якщо $t\in[\lambda_n,\lambda_{n+1})$ для деякого $n\in\mathrm{N}$, то

$$\ln n_\lambda(t) = \ln(n+1) \le \ln n + 1 = \alpha^{-1}(\lambda_n) + 1 \le \alpha^{-1}(t) + 1.$$

Отже, $\ln n_\lambda(t) \le \alpha^{-1}(t) + 1$, $t \ge \lambda_1$.

Далі зауважимо, що з умови (3) випливає умова (7) (з $a = 0$), оскільки

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\lambda_n} \ge \int_1^{+\infty} \frac{dy}{y\alpha(\ln y)} = \int_1^{+\infty} \frac{d\ln y}{\alpha(\ln y)} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\alpha(t)}.$$

За лемою 5 існують додатна неспадна на $[0,+\infty)$ функція β, для якої $\beta(t) = o(\alpha(t))$, $t \to +\infty$, і неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[0,+\infty)$ функція γ, для якої $\gamma(0) = 0$ і $\gamma(t) = o(t)$, $t \to +\infty$, такі, що $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\beta(\gamma(t))} < +\infty$. Нехай $\delta(t) = \beta(t+0)$, $t \ge 0$. Функція δ, як і функція β, є додатною неспадною на $[0,+\infty)$, причому $\delta(t) = o(\alpha(t))$, $t \to +\infty$. Крім того, функція β є неперервною справа на $[0,+\infty)$. Згідно з лемою 2, існує функція $\Phi \in \Omega_A$, для якої $\delta(\gamma(t)) = \Phi'_+(\Phi^{-1}(t))$, $t > 0$. Функція Φ і буде шуканою. Справді, для кожного $C > 0$ і всіх $\sigma \in [\sigma_0(C), A)$ маємо

$$\ln n_\lambda(C\Phi'_+(\sigma)) = \ln n_\lambda(C\delta(\gamma(\Phi(\sigma)))) \le \ln n_\lambda(\alpha(\gamma(\Phi(\sigma)))) \le$$
$$\le \alpha^{-1}(\alpha(\gamma(\Phi(\sigma)))) + 1 = \gamma(\Phi(\sigma)) + 1,$$

звідки випливає (2).

Необхідність. Припустимо, що існує функція $\Phi \in \Omega_A$, для якої виконується умова (2). Тоді, зокрема,

$$\ln n_\lambda(\Phi'_+(\sigma)) \le \Phi(\sigma), \quad \sigma \in [\sigma_0, A).$$

Покладемо $x_0 = \inf\{x \in (-\infty, A) : \Phi'_-(x) > 0\}$,

$$t_0 = \inf\{\Phi(x) : x \in (x_0, A)\} \text{ і } \alpha(t) = \Phi'_-(\Phi^{-1}(t)), \quad t > t_0.$$

Тоді (див. зауваження 1) функція α є додатною неспадною неперервною зліва на $(t_0,+\infty)$ і для фіксованого $t_1 > t_0$ інтеграл (5) збігається.

Нехай n_0 – найменше натуральне число, для якого правильні нерівності $\ln(n-1) \ge t_1$ і $\lambda_n \ge \Phi'_+(\sigma_0)$. Якщо $n \ge n_0$, а $\sigma \in [\sigma_0, A)$ таке, що $\Phi'_-(\sigma) \le \lambda_n \le \Phi'_+(\sigma)$, то

$$\alpha(\ln n) \le \alpha(\ln n_\lambda(\lambda_n)) \le \alpha(\ln n_\lambda(\Phi'_+(\sigma))) \le \alpha(\Phi(\sigma)) = \Phi'_-(\sigma) \le \lambda_n,$$

а тому

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n\lambda_n} \le \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n\alpha(\ln n)} \le \int_{n_0-1}^{+\infty} \frac{dy}{y\alpha(\ln n)} = \int_{\ln(n_0-1)}^{+\infty} \frac{dt}{\alpha(t)} \le \int_{t_1}^{+\infty} \frac{dt}{\alpha(t)} < +\infty,$$

звідки випливає (3). Теорему доведено.

Література

1. Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент / А.Ф.Леонтьев. – М.: Наука, 1976. – 536 с.
2. Шеремета М.М. Цілі ряди Діріхле / М.М.Шеремета. – К.: ІСДО, 1993. – 168 с.
3. Шеремета М.Н. О максимуме модуля и максимальном члене ряда Дирихле / М.Н.Шеремета // Мат. заметки. – 2003. – Т.73, №3. – С. 437-443.
4. Hlova T.Ya. Generalized types of the growth of Dirichlet series / T.Ya.Hlova, P.V.Filevych // Carpathian Math. Publ. – 2015. – V. 7, № 2. – P. 13-27.
5. Bergweiler W. A question of Gol'dberg concerning entire functions with prescribed zeros / W.Bergweiler // J. d'Analyse Math. – 1994. – V. 63. – P. 121-129.

Стаття надійшла до редакційної колегії 12.02.2016 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором ***Загороднюком А.В.,***
д.ф.-м.н., професором ***Заболоцьким М.В.*** *(м. Львів)*

THE GROWTH OF DIRICHLET SERIES ABSOLUTELY CONVERGENT IN A HALF-PLANE IN TERMS OF GENERALIZED TYPES

T. Ya. Hlova
Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics; 79060, Lviv, Naukova str., 3-b; e-mail: hlova_taras@ukr.net

Let $A \in (-\infty, +\infty)$. *We establish a necessary and sufficient condition on a nonnegative sequence* (λ_n), *increasing to* $+\infty$, *under which there exists a function* Φ, *convex and increasing to* $+\infty$ *on* $(-\infty, A)$, *such that for every Dirichlet series of the form* $F(s) = \sum a_n e^{s\lambda_n}$, $s = \sigma + it$, *absolutely convergent in the half-plane* $Res < A$, *we have*

$$\varlimsup_{\sigma \uparrow A} \frac{\ln \sup\{|F(s)| : Res = \sigma\}}{\Phi(\sigma)} = \varlimsup_{\sigma \uparrow A} \frac{\ln \max\{|a_n| e^{\sigma\lambda_n} : n \geq 0\}}{\Phi(\sigma)}.$$

Key words: *Dirichlet series, maximum modulus, maximal term, generalized type.*