УДК 517.53

ТЕОРЕМА ТИПУ БОРЕЛЯ ДЛЯ ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ З ДОВІЛЬНОЮ КОМПЛЕКСНОЮ ПОСЛІДОВНІСТЮ ПОКАЗНИКІВ

І. Є. Овчар

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15; тел. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua

У цій статті сформульовано і доведено теорему типу Бореля $\ln|F(z)|\le(1+o(1))\ln\mu(z,F),$ *при* $z\to\infty$ $(z\in K\setminus E)$ *про асимптотичне співвідношення між логарифмом максимуму модуля та логарифмом максимального члена цілого ряду Діріхле з довільною необмеженою комплексною послідовністю показників* λ_n.

Ключові слова: *цілі ряди Діріхле, максимальний член, максимум модуля, співвідношення типу Бореля.*

1. Вступ і огляд результатів

Через S_a позначимо клас абсолютно збіжних у півплощині

$$\Pi_a=\{z:\operatorname{Re} z<a\},\ a\le+\infty,$$

рядів Діріхле вигляду

$$F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n e^{z\lambda_n},\quad z\in\mathbb{C}, \tag{1}$$

де $\{\lambda_n:n\ge0\}\subset[0,+\infty)$; $S\overset{def}{=}S_{+\infty}$ – клас цілих рядів Діріхле.

Для $F\in S_a$, $a\le+\infty$, та $x<a$ позначимо

$$M(x,F)=\sup\{|F(x+iy)|:y\in\mathbb{R}\},\quad \mu(x,F)=\max\{|a_n|e^{x\lambda_n}:n\ge0\}.$$

Відомо [1], що для того, щоб для кожної функції $F\in S^+(\lambda)$ співвідношення Бореля

$$\ln M(x,F)=(1+o(1))\ln\mu(x,F) \tag{2}$$

виконувалось при $x\to+\infty$ зовні деякої множини $E\subset[0,+\infty)$ $(x\notin E)$ скінченної міри Лебега необхідно і достатньо, щоб умова

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty}\frac{1}{n\mu_n}<+\infty \tag{3}$$

виконувалась з $\mu_n=\lambda_n$ $(n\ge0)$.

У статті [8] подібний ефект встановлений стосовно співвідношення (2) у класі S. Для формулювання цієї теореми введемо наступні позначення.

Через L позначимо клас неперервних, додатних, зростаючих до $+\infty$ функцій;

L_1 – підклас L, до якого входять функції $\Phi(t)$ такі, що

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\Phi(t)}{t}\,dt = O(\Phi(x)) \quad (x \to +\infty);$$

L_2 – підклас L, до якого входять функції $\Phi(t)$, обернені функції $\varphi(t)$ до яких задовольняють умову Карамати

$$(\forall c > 0):\ \ \varphi(ct) = O(\varphi(t)) \quad (t \to +\infty).$$

Логарифмічною мірою вимірної множини $E \subset [1,+\infty)$ називаємо величину

$$\ln\text{-}\,\mathrm{m}eas(E) \stackrel{def}{=} \int_E d\ln x.$$

Через S^Δ, $\Delta \in (0,+\infty]$, позначимо клас цілих рядів Діріхле з класу S, показники яких задовольняють умову

$$(\forall\, n \ge 0): \lambda_n < \sup\{\lambda_j : j \ge 0\} \stackrel{def}{=} \beta, \tag{4}$$

з $\beta \le \Delta$.

Додатну послідовність (x_n) назвемо *майже монотонно спадною*, якщо знайдеться стала $\delta > 0$ така, що $x_m \le \delta x_n$ для всіх $n \ge n_1$ і $m \ge n+1$.

Зрозуміло, що кожна незростаюча додатна послідовність є майже монотонно спадна. Для того, щоб у цьому переконатись досить вибрати $\delta = 1$.

У статтях [5], [8] наведені такі теореми та твердження.

Теорема 1 [8]. *Нехай* $F \in S^\Delta$, $\Delta \le +\infty$, $\mu_n \stackrel{def}{=} -\ln|a_n|$. *Якщо* $\Phi_1 \in L_1$, $\Phi_1(\sigma) \stackrel{def}{=} \dfrac{1}{\sigma}\ln\mu(\sigma,F)$, *послідовність* $(\ln n/\mu_n)$ *майже монотонно спадна і виконується умова (3), то співвідношення (2) виконується при* $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \notin E, \ln\text{-}\,\mathrm{m}eas(E) < +\infty)$, *тобто, зовні деякої множини скінченної логарифмічної міри.*

Твердження 1 [5]. *Якщо* $F \in S^\Delta$ *і* $\Delta < +\infty$, *то співвідношення (2) виконується при* $x \to +\infty$. *Більше того,*

$$\ln M(x,F) = (1+o(1))\ln\mu(x,F) = (1+o(1))\beta x \quad (x \to +\infty),$$

де $\beta = \sup\{\lambda_n : n \in \mathrm{Z}_+\}$.

Теорема 2 [8]. *Нехай* $F \in \Delta$, *а* $v(u)$ – *невід'ємна на* $[0,+\infty)$ *і додатна при* $u \geq u_0$ *функція, така, що* $\int_0^{+\infty} v(u)du < +\infty.$ *Якщо виконується умова* $\ln n = o(\ln|a_n|)$ $(n \to +\infty)$, *то існують функція* $c_1(u) \uparrow +\infty$ $(u \to +\infty)$, $\int_0^{+\infty} c_1(u)v(4u)du < +\infty$, *і множина* $E \subset \gamma_+(F)$, $\tau_2(E \cap \gamma_+(F)) \leq \pi$, *такі, що для кожного* $R > 0$, *для всіх* $n \geq 0$ *і для всіх* $t > 0, tz \in \gamma_R \setminus E$ *виконується нерівність*

$$|a_n| \mathrm{e}^{t\Re(z\lambda_n)} \leq \mu(tz, F)\exp\{-t\int_{\mu_\nu}^{\mu_n}(\mu_n - u)\frac{c_z(u)}{\varphi_z^*(u)}v(4u)du\}, \qquad (5)$$

де $\mu_n = -\ln|a_n|$, $c_z(u) = e^{-2K(z)}c_1(u)$,

$$\nu = \nu(tz, F) = \max\{n : |a_n| e^{t\Re(z\lambda_n)} = \mu(tz, F)\}$$

центральний індекс ряду (1), а $\varphi_z^*(u)$ – обернена функція до функції $\Phi_z^*(t) = \ln \mu(tz, F)$.

Метою цієї статті є доведення аналогу класичного співвідношення типу Бореля в класі абсолютно збіжних у всій комплексній площині рядів Діріхле вигляду (1), послідовність показників яких (λ_n), взагалі кажучи, є довільною послідовністю комплексних чисел, для якої нескінченність є точкою скупчення, тобто $\lambda_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ і $\overline{\lim}_{n\to+\infty}|\lambda_n| = +\infty.$

2. Основні результати

Для вимірної за Лебегом множини на площині (наприклад, для борелевої множини) $E \subset \mathrm{X}$ та $\alpha > 0$ позначимо

$$\tau_\alpha(E) \stackrel{def}{=} \int_{E\cap\{z:|z|\geq 1\}} \frac{dxdy}{|z|^\alpha}, \quad z = x + iy.$$

Зауважимо, що для круга $\Delta_R = \{z : |z| \leq R\}$

$$\tau_2(\Delta_R) = 2\pi \ln R.$$

Через D позначимо клас абсолютно збіжних у всій комплексній площині C (цілих) рядів Діріхле вигляду (1), послідовність показників яких $\{\lambda_n : n \geq 0\} \subset \mathsf{C}$.

Для $F \in \mathsf{D}$ і $z \in \mathsf{C}$ позначимо

$$\mu(z, F) \stackrel{def}{=} \sup\{|a_n| e^{\mathrm{Re}(z\lambda_n)} : n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Нехай для $F \in \mathsf{D}$. Скрізь нижче вважатимемо, що

$$\mu(z, F) = 1 \quad (z \in \mathsf{D}_1), \qquad (6)$$

де $\mathsf{D}_1 = \{z \in \mathsf{C} : |z| \le 1\}$. Якщо ця умова не виконується, то для

$$b \overset{def}{=} \max\{\mu(z,F) : z \in \mathsf{D}_1\}$$

означимо

$$F_2(z) = \frac{1}{2b}(F(z) - a_0 + 2b).$$

Зрозуміло, що тоді

$$\mu(z, F_2) = 1 \quad (z \in \mathsf{D}_1),$$

і зокрема,

$$\max\{2b, |a_n| : n \ge 1\} = \mu(0, F_2) = 1.$$

Для функції $F \in \mathsf{D}$ і фіксованого $z \in \mathsf{C}$ визначимо функцію

$$\Phi_z(t) = \frac{1}{t}\ln \mu(tz, F) : [0,+\infty) \to [0,+\infty).$$

Для функції $F \in \mathsf{D}$ означимо такі множини

$$\gamma(F) \overset{def}{=} \{z \in \mathrm{X} : \lim_{t\to+\infty} \Phi_z(t) = +\infty\},\ \gamma_+(F) \overset{def}{=} \{z \in \gamma(F) : \Phi_z \in \mathsf{L}_0\}.$$

З опуклості функції $\ln \mu(tz, F)$ як функції від $t \ge 0$ за умови (6) для кожного фіксованого $z \in \gamma(F)$ отримаємо, що для $t_2 > t_1 \ge t_0$

$$\Phi_z(t_2) = (\ln \mu(t_2 z, F) - \ln \mu(0,F))/(t_2 - 0) \ge$$
$$\ge (\ln \mu(t_1 z, F) - \ln \mu(0,F))/(t_1 - 0) = \Phi_z(t_1) \ge 0, \qquad (7)$$

тобто, функція $\Phi_z(t)$ неперервна, невід'ємна на $[0,+\infty)$ і строго зростає на $[t_0,+\infty)$ з деяким $t_0 \ge 1$. Зрозуміло, що

$$t_0 = t_0(z) := \max\{t \in \mathsf{R} : \mu(tz, F) = 1\} \qquad (8)$$

має цю властивість. Тому, ми можемо визначити при фіксованому $z \in \gamma(F)$ функцію

$$\varphi_z(u) : [0,+\infty) \to [t_0,+\infty),$$

обернену до функції $\Phi_z(t) : [t_0,+\infty) \to [\Phi_z(t_0),+\infty) = [0,+\infty)$. Зауважимо, що, $\Phi_z(t) \equiv 0$ $(0 \le t \le t_0)$ і $\varphi_z(0) = t_0$, де $t_0 = t_0(z)$.

Той факт, що $\gamma(F)$ і $\gamma_+(F)$ є дійсними конусами випливає з такого твердження.

Твердження 2. Для кожної функції $F \in \mathsf{D}$

$$z \in \gamma(F) \Leftrightarrow (\forall\, r > 0) : (rz) \in \gamma(F),$$

а також

$$z \in \gamma_+(F) \Leftrightarrow (\forall\, r > 0) : (rz) \in \gamma_+(F).$$

Доведення. Оскільки $\Phi_{rz}(t) = r\Phi_z(rt)$, для $r > 0$, то перше твердження очевидне. Доведемо, що $z \in \gamma(F) \Rightarrow (\forall r > 0) : (rz) \in \gamma(F)$ – буде достатнім для доведення другого співвідношення. Маємо

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\Phi_{rz}(t)}{t}dt = r\int_{x_0}^{x}\frac{\Phi_z(rt)}{rt}d(rt) =$$

$$= r\int_{rx_0}^{rx}\frac{\Phi_z(u)}{u}d(u) = O(\Phi_z(rx)) = O(\Phi_{rz}(x)) \quad (x\to+\infty).$$

Означимо такі функції

$$\beta(z) \overset{def}{=} \sup\{\Re(z\lambda_n) : n\in \mathsf{Z}_+\} : \mathsf{C}\to\mathsf{R},$$

$$\mathsf{M}(z,F) \overset{def}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|e^{\Re(z\lambda_n)} \quad (z\in\mathsf{C}).$$

Наступне твердження доведено в [7].

Твердження 3. *Для кожної функції* $F\in\mathsf{D}$

$$\gamma(F) = \{z\in\mathsf{C} : \beta(z) = +\infty\}.$$

Твердження 4. *Нехай* $F\in\Delta$. *Для кожного конуса (кута або об'єднання кутів)* K *з вершиною у точці* $z=0$ *такого, що* $\overline{K}\setminus\{0\}\subset\gamma(F)$, *виконується*

$$\nu(z,F)\to+\infty, \quad \frac{1}{|z|}\ln\mu(z,F)\to+\infty \quad (z\to\infty, z\in K),$$

де $\nu(z,F) = \max\{n : |a_n|e^{Re(z\lambda_n)} = \mu(z,F)\}$.

Доведення Твердження 4. Доведемо спочатку, що

$$\frac{1}{|z|}\ln\mu(z,F)\to+\infty \quad (z\to\infty, z\in K).$$

Міркуючи від супротивного, припустимо, що існує послідовність (z_j), $z_j\in K$ $(j\ge1)$, така, що $z_j\to+\infty$ $(j\to+\infty)$ та

$$\frac{1}{|z_j|}\ln\mu(z_j,F)\le C<+\infty \quad (j\ge1). \tag{9}$$

Позначимо $t_j = |z_j|$, $z_j^{(0)} = z_j/|z_j|$. Оскільки $z_j^{(0)}\in K\cap\{z : |z|=1\}$, то послідовність $(z_j^{(0)})$ має точку скупчення

$$z_1\in\overline{K}\cap\{z : |z|=1\}.$$

Тому існує підпослідовність $(z_j^{(1)})$, $z_j^{(1)} = z_{k_j}^{(0)}$ $(j\ge1)$ послідовності $(z_j^{(0)})$ така, що $\lim\limits_{j\to+\infty} z_j^{(1)} = z_1$. Нехай $z_j^{*} = z_j^{(1)}t_{k_j} = z_{k_j}$.

Далі, оскільки $z_1\in\gamma(F)$, то існує $t_0>1$ таке, що

$$\Phi_{z_1}(t) = \frac{1}{t}\ln\mu(tz_1,F)\ge 2C \quad (t\ge t_0). \tag{10}$$

З (7) та (9) при $t = t_1 = t_0$, $t_2 = |z_j^*|$ отримуємо

$$\Phi_{z_j^{(1)}}(t_0) = \frac{1}{t_0}\ln\mu(t_0 z_j^{(1)}, F) \le \Phi_{z_j^{(1)}}(t_2) = \frac{1}{|z_j^*|}\ln\mu(z_j^*, F) \le C.$$

Переходячи тут до границі при $j \to +\infty$, разом з (10) отримуємо

$$2C \le \Phi_{z_1}(t_0) = \lim_{j\to+\infty}\frac{1}{t_0}\ln\mu(t_0 z_j^{(1)}, F) \le C.$$

Отримали суперечність.

Якщо $z \notin \gamma(F)$ і $\beta(z) > 0$, то згідно [5], Зауваження 1

$$\ln \mathsf{M}(tz, F) = (1+o(1))\ln\mu(tz, F) = (1+o(1))\beta(z)t \quad (t \to +\infty).$$

Якщо ж $z \in \gamma_+(F)$, то за твердженням 2 до $\mathsf{M}(z, F)$ можна застосувати Теорему 2, за якою

$$\ln \mathsf{M}(tz, F) = (1+o(1))\ln\mu(tz, F)$$

при $t \to +\infty$ зовні деякої множини E_z скінченної логарифмічної міри. Звідси, оскільки

$$|F(tz)| \le \mathsf{M}(tz, F),$$

випливає таке твердження.

Твердження 5. *Нехай* $F \in \mathsf{D}$, $\mu_n = -\ln|a_n|$ $(n \ge 0)$, *а послідовність* $(\ln n/\mu_n)$ *майже монотонно спадна і виконується умова ((3)) з* $\mu_n = \ln a_n$. *Тоді для кожного* $z \in \gamma_+(F)$ *існує множина* $E_z \subset [1, +\infty)$ *скінченної логарифмічної міри, тобто,* $\ln\text{-}\mathrm{m}eas(E_z) < +\infty$, *така, що*

$$\ln|F(tz)| \le (1+o(1))\ln\mu(tz, F) \quad (t \to +\infty, t \notin E_z).$$

Зауважимо, що якщо знайдеться така стала $A < +\infty$, що для кожного $z \in \gamma(F), |z| = 1$

$$\ln\text{-}\mathrm{m}eas(E_z) \le A,$$

то для множини

$$E = \bigcup_{z\in\gamma(F)\cap\partial\Delta_1}\{tz : t \in E_z\}$$

отримаємо

$$\tau_2(E) = \int\limits_{\psi: e^{i\psi}\in\gamma(F)}\Big(\int\limits_{E_{e^{i\psi}}}\frac{dt}{t}\Big)d\psi \le A\cdot\theta,$$

де θ – кутова міра множини $\{z : z \in \gamma(F), |z| = 1\}$.

Для функції $F \in \Delta$ та $z \in \gamma_F$ визначимо

$$K(z) = K_F(z) \overset{def}{=} \sup\{\frac{1}{\Phi_z(t)}\int_0^t\frac{\Phi_z(u)}{u}du : t \ge t_0\}, \tag{11}$$

де $\Phi_z(t)=\frac{1}{t}\ln\mu(tz,F)$, а t_0 визначено в (8). Зрозуміло, що

$$\gamma_+(F)=\{z\in\gamma(F):K_F(z)<+\infty\}. \qquad (12)$$

Для $R\in(0,+\infty)$ позначимо

$$\gamma_R=\gamma_+(F,R)\overset{def}{=}\{z:K_F(z)\le R\}. \qquad (13)$$

З Твердження 2 випливає, що для кожного $R>0$ множина γ_R також є необмеженим дійсним конусом (кутом) з вершиною у початку координат.

Доведемо тепер теорему про співвідношення типу Бореля для цілих рядів Діріхле з класу D.

Теорема 3. *Нехай* $F\in\mathsf{D}$, $\mu_n\overset{def}{=}-\ln|a_n|$. *Якщо послідовність* $(\ln n/\mu_n)$ *майже монотонно спадна і виконується умова (3), тоді існує вимірна множина* $E\subset\mathsf{C}$, $\tau_2(E)<+\infty$, *така, що для кожного* $R>0$ *і конуса* K *з вершиною у початку координат такого, що* $\overline{K}\setminus\{0\}\subset\gamma_+(F,R)$ *співвідношення*

$$\ln|F(z)|\le(1+o(1))\ln\mu(z,F)$$

виконується при $z\to\infty$ $(z\in K\setminus E)$.

Доведення. Спочатку вважатимемо, що виконується умова (6), тобто, що $\mu(z,F)=1$ $(z\in\mathsf{D}_1)$. Тому Теорему 2 можна використати з функціями

$$v(t)=16t^{-2}\ln n_1(t),\quad c_1(t)=c(4t).$$

Підставляючи в (5) $n=0$ для всіх $tz\notin E,\tau_2(E)<+\infty$, маємо:

$$\ln\mu(tz,F)\ge t\int_0^{\mu_\nu}\frac{1}{\varphi_z^*(t)}\frac{c(4u)\ln n_1(4u)}{u}du\ge$$

$$\ge\frac{t}{\varphi_z^*(\mu_\nu)}e^{-2K(z)}c(2\mu_\nu)\ln n_1(2\mu_\nu)\ln 2, \qquad (14)$$

де $\varphi_z^*(t)$ – функція, обернена до функції $\Phi_z^*(t)=\ln\mu(tz,F)$.

З того, що послідовність $(\ln n/\mu_n)$ майже монотонно спадна випливає, що

$$\frac{\ln n_1(\tau)}{\tau}\le 2\delta\cdot\frac{\ln n_1(t)}{t}$$

для всіх $t\ge t_0$ і $\tau\ge t$. Тому з нерівності (5) для всіх $tz\notin E$ маємо

$$\sum_{\mu_n>2\mu_\nu}\frac{|a_n|\,\mathrm{e}^{t\Re(z\lambda_n)}}{\mu(tz,F)}\le\sum_{\mu_n>2\mu_\nu}\exp\{-e^{-2K(z)}x\int_{\mu_\nu}^{\mu_n}\frac{c(4u)}{\varphi_z^*(u)}\frac{\mu_n-u}{u^2}\ln n_1(4u)du\}\le$$

$$\leq \sum_{\mu_n > 2\mu_\nu} \exp\{-e^{-2K(z)} c^*(4\mu_\nu) \frac{\mu_\nu t}{\varphi_z^*(\mu_\nu)} \frac{\ln n_1(4\mu_n)}{\mu_n} \int_{\mu_\nu}^{\mu_n} \frac{\mu_n - u}{u^2} du\},$$

де $c^*(4\mu_\nu) \overset{def}{=} c(4\mu_\nu)/(2\delta)$, $\nu = \nu(tz, F)$.

Оскільки $\max\left\{\frac{\ln x}{x} : x > 0\right\} = \frac{1}{\mathrm{e}}$, то для всіх $tz \notin E$ отримаємо

$$\sum_{\mu_n > 2\mu_\nu} \frac{|a_n| \mathrm{e}^{t\Re(z\lambda_n)}}{\mu(tz, F)} \leq\leq \sum_{\mu_n > 2\mu_\nu} \exp\left\{\frac{-tc^*(\mu_\nu)}{\varphi_z^*(\mu_\nu)} e^{-2K(z)} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) \ln n_1(4\mu_n)\right\},$$

де $\nu = \nu(tz, F)$ – центральний індекс.

Зауважимо тепер, якщо припустити виконання умови (6), то для всіх $t > 0$ з нерівності

$$0 \leq \ln \mu(tz, F) = -\mu_\nu + t\Re(z\lambda_\nu),$$

отримаємо, що

$$t \geq \frac{\mu_\nu}{\Re(z\lambda_\nu)}.$$

Тому

$$t \geq \frac{1}{2} \varphi_z^*(\mu_\nu).$$

Отже, з (14) для всіх $tz \notin E$ маємо

$$\ln \mu(tz, F) \geq \frac{\ln 2}{2} c(2\mu_\nu) e^{-2K(z)} \ln n_1(2\mu_\nu), \tag{15}$$

$$\sum_{\mu_n > 2\mu_\nu} \frac{|a_n| \mathrm{e}^{t\Re(z\lambda_n)}}{\mu(tz, F)} \leq \sum_{\mu_n > 2\mu_\nu} \exp\left\{-e^{-2K(z)} \frac{c^*(\mu_\nu)}{2} \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) \ln n_1(4\mu_n)\right\}, \tag{16}$$

де $\nu = \nu(tz, F)$.

За твердженням 3, для кожного конуса (об’єднання кутів) K з вершиною у точці 0 такого, що $\overline{K} \setminus \{0\} \subset \gamma(F)$, виконується

$$\nu(z, F) \to +\infty, \quad \frac{1}{|z|} \ln \mu(z, F) \to +\infty \quad (z \to \infty, z \in K).$$

Тому, пригадуючи, що $\overline{K} \setminus \{0\} \subset \gamma_+(F, R) \subset \gamma_+(F) \subset \gamma(F)$, $R \in (0, +\infty)$, звідси, а також із співвідношень (15), (16) при $z \to \infty$ $(z \in K \setminus E, \tau_2(E) < +\infty)$ отримаємо

$$\ln \mu(z, F) \geq \frac{\ln 2}{2} c(2\mu_\nu) e^{-2R} \ln n_1(2\mu_\nu),$$

$$\sum_{\mu_n>2\mu_\nu}\frac{|a_n|\,\mathrm{e}^{\Re(\tau\lambda_n)}}{\mu(z,F)}\le\le\sum_{\mu_n>2\mu_\nu}\exp\left\{-e^{-2R}\frac{c^*(\mu_\nu)}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\ln n_1(4\mu_n)\right\}.$$

Отже, при $z\to\infty\quad (z\in K\setminus E,\tau_2(E)<+\infty)$

$$\frac{\ln|F(z)|}{\ln\mu(z,F)}\le\frac{\ln(n_1(2\mu_\nu)+o(1))}{\frac{\ln 2}{2}c(2\mu_\nu)e^{-2R}\ln n_1(2\mu_\nu)}\le 1+o(1).$$

У випадку, коли умова (6) виконується, Теорему 3 доведено.

Залишилося розглянути випадок, коли умова (6) не виконується. Для функції

$$F_2(z)=\frac{1}{2b}(F(z)-a_0+2b),$$

де $b\overset{def}{=}\max\{\mu(z,F):z\in\Delta_1\}$, ця умова, а також інші умови Теореми 3 вже виконуються.

За доведеним, при $z\to\infty\quad (z\in K\setminus E,\tau_2(E)<+\infty)$

$$\ln|F_2(z)|\le(1+o(1))\ln\mu(z,F_2),\tag{17}$$

де $\overline{K}\setminus\{0\}\subset\gamma_+(F_2,R),\ R\in(0,+\infty)$. Оскільки

$$F(z)=2bF_2(z)+a_0-2b,$$

для всіх досить великих за модулем $z\in\gamma(F)$

$$\mu(z,F)=2b\mu(z,F_2).$$

Зрозуміло, що звідси і з (17) тепер випливає, що

$$\ln|F(z)|\le(1+o(1))\ln\mu(z,F),$$

при $z\to\infty\quad (z\in K\setminus E,\,\tau_2(E)<+\infty)$, де $\overline{K}\setminus\{0\}\subset\gamma_+(F_2,R),\ R\in(0,+\infty)$.

Література

1. Скаскив О.Б. О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию / О.Б.Скаскив // Матем. заметки. – 1985. – Т.37, 1. – С. 41-47.
2. Скасків О.Б. Про еквівалентність суми і максимального члена цілого ряду Діріхле // О.Б.Скаскив / Матем. студії. – 2009. – Т.31, 1. – С. 37-46.
3. Скасків О.Б. Про еквівалентність суми і максимального члена абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле / О.Б.Скасків, Я.З.Стасюк // Карпатські математ. публікації. – 2009. – Т.1, 1. – С. 100-106.
4. Сало Т. Про максимум модуля і максимальний член абсолютно збіжних рядів Діріхле / Т.Сало, О.Скасків // Матем. Вісник НТШ. – 2007. – Т. 3. – С. 764-574.
5. Долинюк М. Про правильне зростання суперпозиції ряду Діріхле і зростаючої функції / М.Долинюк // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2009. – Вип. 70. – С. 45-51.

6. Lutsyshyn M.R. Borel relation for entire Dirichlet series with complex exponents / M.R.Lutsyshyn, O.B.Skaskiv // Complex Analysis and its Applications: Book of abstracts. – Internationale conf. (Lviv, May 26-29, 2003). – Lviv, 2003. – P. 45.
7. Луцишин М.Р. Про максимальний член цілого ряду Діріхле з комплексними показниками і монотонними коефіцієнтами / М.Р.Луцишин // Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. – 1998. – Вип.51. – С. 33-36.
8. Овчар І.Є. Теорема типу Бореля для цілих рядів Діріхле з немонотонними показниками / І.Є.Овчар, О.Б.Скасків // Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. – 2010. – Вип.72. – С.232-242.

Стаття надійшла до редакційної колегії 26.01.2016 р.

Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором ***Загороднюком А.В.,*** *д.ф.-м.н., професором* ***Скасківим О.Б. (м. Львів)***

THEOREM OF BOREL TYPE FOR WHOLE ROWS DIRIHLE WITH ARBITRARY COMPLEX SEQUENCE OF INDEXES

I. Y. Ovchar

Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivsk, Carpathians str., 15;
ph. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua

In this article a Borel's type relation $\ln|F(z)| \le (1+o(1))\ln\mu(z,F)$, *where* $z \to \infty$ $(z \in K \setminus E)$ *between logarithms of maximum of the modulus of its sum and a maximal term of entire Dirichlet series with arbitrary sequence of complex exponents* λ_n *is obtained.*

Key words: *whole Dirihle's* series*, maximal term, maximum of the module, correlation to Borel type.*