Математичний аналіз

УДК 517.53

ПОРІВНЯННЯ ПОТУЖНОСТЕЙ ВИКЛЮЧНИХ МНОЖИН МЕРОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ

Я. І. Савчук, І. Є. Овчар
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15; тел. +380 (3422) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua

Розглядається питання про розподіл значень мероморфних функцій скінченного порядку. Показано, що множина виключних значень в розумінні Ж. Валірона може мати потужність континуум.

Ключові слова: *мероморфні функції скінченного порядку, виключні значення, потужність множини.*

Характеристикою росту цілої функції $f(z)$ і максимум $M(r,f)$ її модуля в крузі $\{|z|\le r\}$,який досягається на колі $\{|z|=r\}$. Виявляється, що з цією характеристикою тісно пов'язана величина

$$N(r,a,f)=\int_0^r \frac{n(t,a,f)-n(0,a,f)}{t}dt+n(0,a,f)\ln r,$$

де $n(r,a,f)$ – кількість a-точок з врахуванням їх кратності в крузі $\{|z|\le r\}$, яка для «більшості» a-точок еквівалентна величині

$$m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi,$$

де функція $\ln^+|x|$ визначається рівністю $\ln^+|x|=\max\{\ln|x|,0\}$.

Характеристика росту $T(r,f)$ для мероморфної в $\boldsymbol{C}$ функції, яку можна вважати часткою двох цілих, визначається по-іншому [1], однак для «більшості» a-точок також $N(r,a,f)\sim T(r,f)$ при $r\to\infty$. Ті a-точки, для яких це порушується, природно назвати виключними значеннями. Зокрема, якщо $\varliminf_{r\to\infty}\frac{N(r,a,f)}{T(r,f)}<1$, то a називається виключним значенням в розумінні Валірона, а якщо $\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(r,a,f)}{T(r,f)}<1$, то a називається виключним значенням в розумінні Неванлінни. Множини усіх таких виключних значень позначають відповідно $E_V(f)$ та $E_N(f)$. Очевидно, що $E_N(f)\subset E_V(f)$. З другої основної теореми Неванлінни (див., наприклад, [2]) легко випливає, що множина $E_N(f)$ не більше ніж злічення. В цій статті ми покажемо, що множина $E_V(f)$ може мати потужність континуум.

Множину $U\subset \boldsymbol{C}$ назвемо H-множиною, якщо існують $\alpha>0$ та числа $a_1, a_2, \ldots \in \boldsymbol{C}$, такі що для довільного $a\in U$ виконується

$$|a-a_n|<\exp\left(-e^{n\alpha}\right) \tag{1}$$

для нескінченної кількості значень n.

Відзначимо, що якщо в цьому означенні нерівність (1) замінити нестрогою нерівністю

$$|a-a_n|\le\exp\left(-e^{n\alpha}\right), \tag{2}$$

то U також буде H-множиною. Ми надалі користуватимемось нерівністю (2).

В [3] показано, що для будь-якої H-множини U існує така мероморфна функція скінченного порядку, що $U\subset E_V(f)$. Тому нам достатньо побудувати H-множину, яка має потужність континуум. Займемось цим.

Розглянемо множину усіх додатних десяткових дробів виду $0,k_1k_2\ldots k_j\ldots$, де кожне із k_j є однією з цифр $0,\ 1,\ 2$. Розіб'ємо розглядувану множину на об'єднання підмножин, що не перетинаються, за таким правилом. Два числа $0,k_1^{(1)}k_2^{(1)}\ldots k_j^{(1)}\ldots$ та $0,k_1^{(2)}k_2^{(2)}\ldots k_j^{(2)}\ldots$ належать одній підмножині, якщо, викинувши в кожному з чисел усі ті $k_j^{(1)}$ та $k_j^{(2)}$, які є нулями, отримаємо одне і те ж число. Зрозуміло, що це число буде або скінченним десятковим дробом виду

$$0,s_1s_2\ldots s_m \tag{3}$$

або нескінченним дробом виду

$$0,s_1s_2\ldots s_j\ldots, \tag{4}$$

де кожне з s_j є однією з цифр 1 або 2. Очевидно, потужність множини, елементами якої є утворені підмножини, буде такою ж, як і множина всеможливих чисел виду (3) та (4), яку позначимо через S. Легко бачити, що можна встановити взаємно однозначну відповідність між елементами деякої підмножини із S та дійсними числами з інтервалу

$L=(0;1)$ (наприклад, кожному дійсному числу x із L, записаному в двійковій системі у вигляді двійкового дробу, скінченного чи нескінченного, ставимо у відповідність одне єдине число виду (3) або (4), в якому одиниці після коми збережуться на тих же місцях, що й в x, а двійки будуть на тих місцях, на яких в числі x стоять нулі). Так як L має потужність континуум і $S\subset L$, то S також матиме потужність континуум. Множина чисел виду (1) є нескінченною підмножиною множини раціональних чисел, отже, вона зліченна. Отже, множина усіх чисел виду (4), яку позначимо $\tilde{S}$, має потужність континуум.

Тепер для фіксованого $\alpha>0$ займемось побудовою H-множини U потужності континуум. Числа $a_1, a_2, \ldots \in \boldsymbol{C}$ вибиратимемо таким чином

$$a_1=0{,}1; \qquad a_2=0{,}2.$$

Наступні числа $a_3, a_4, a_5, \ldots$ вибиратимемо рекурентно за таким правилом. Для кожного $k\in\boldsymbol{N}$ число a_{2k+1} беремо, записуючи число a_k, а далі після останньої цифри після коми приписуємо скінченну кількість нулів і останньою цифрою одиницю так, щоб виконувалось

$$\left\{z:\left|z-a_{2k+1}\right|\le\exp\left(-e^{(2k+1)\alpha}\right)\right\}\subset\left\{z:\left|z-a_k\right|\le\exp\left(-e^{k\alpha}\right)\right\}. \qquad (5)$$

Аналогічно беремо a_{2k+2}, тільки останньою цифрою записуємо двійку і щоб виконувалась нерівність

$$\left\{z:\left|z-a_{2k+2}\right|\le\exp\left(-e^{(2k+2)\alpha}\right)\right\}\subset\left\{z:\left|z-a_k\right|\le\exp\left(-e^{k\alpha}\right)\right\}. \qquad (6)$$

Покажемо тепер, що для будь-якого числа x виду (4) відповідна підмножина A_x містить хоча б один елемент із побудованої H-множини U. Дійсно для довільного числа виду (4) розглянемо підпослідовність $n_1, n_2, \ldots, n_j, \ldots$ із натуральних чисел, де $n_1=s_1$, $n_{j+1}=2n_j+s_{j+1}$, $j=1,2,3,\ldots$, і відповідну підпослідовність вкладених замкнених кругів $K_{n_1}, K_{n_2}, \ldots, K_{n_j}, \ldots$, де $K_{n_j}=\left\{z:\left|z-a_{n_j}\right|\le\exp\left(-e^{n_j\alpha}\right)\right\}$. Оскільки радіуси прямують до нуля, то існує єдина точка $\lim\limits_{j\to\infty}a_{n_j}=\tilde{x}\in A_x$, яка належить усім K_{n_j}, отже, $\tilde{x}\in U$. Так як множина усіх підмножин A_x має потужність континуум, то й побудована H-множина U має потужність континуум.

Література

1. Хейман У. Мероморфные функции / У.Хейман. – М.: Мир, 1966. – 287 с.
2. Гольдберг А.А. Распределение значений мероморфных функцій / А.А. Гольдберг, И.В. Островский. – М.: Наука, 1970. – 592 с.

3. Hylltngren A. Valiron deficient values for meromorphic functions in the plane / A. Hylltngren // Acta math. – 1970. **124**, 1-2. – P. 1-8.

Стаття надійшла до редакційної колегії 2.03.2016 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором ***Загороднюком А.В.,***
д.ф.-м.н., професором ***Никифорчиним О.Р.***

COMPARISON OF EXCEPTIONAL GREAT NUMBERS OF MEROMORFNIH FUNCTIONS CAPACITY

Y. I. Savchuk, I. Y. Ovchar
Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivs'k, Carpathians str., 15;
ph. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung. edu. ua

A question about distributing of values of meromorph functions of calculated order is examined. It is shown, that the great number of exceptional values in understanding G. Valiron can have power continuum.

Key words: *meromorph functions of calculated order, exceptional values, capacity of great number.*