УДК 517.537.6

АБСЦИСИ ЗБІЖНОСТІ ВИПАДКОВИХ КРАТНИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

А. О. Куриляк, О. Б. Скасків, Н. Ю. Стасів
Львівський національний університет імені Івана Франка;
79001, Львів, вул. Університетська, 1;
e-mail: andriykurylyak@gmail.com, olskask@gmail.com, n-stas@ukr.net

Нехай $F_\omega(s)=\sum_{\|n\|=0}^{\infty} f_{(n)}(\omega)\exp\{(\lambda_{(n)},s)\}$, *де показники* $\lambda_{(n)}=(\lambda_{n_1}^{(1)},\ldots,\lambda_{n_p}^{(p)})\in\mathsf{R}_+^p=[0,+\infty)^p$, $(n)=(n_1,\ldots,n_p)\in\mathsf{Z}_+^p$, $\mathsf{Z}_+:=\mathsf{N}\cup\{0\}$, $p\in\mathsf{N}$, $\|n\|=n_1+\ldots+n_p$, *а коефіцієнти* $(f_{(n)}(\omega))$ *є попарно незалежними комплексними випадковими величинами. У статті, зокрема доведено такі твердження: 1) Якщо* $\tau(\lambda):=\overline{\lim}_{\|n\|\to+\infty}\ln\|n\|/\|\lambda_{(n)}\|=0$, *то для того, щоб ряд Діріхле збігався м.н. скрізь в* C^p *необхідно і досить, щоб*

$$(\forall\Delta>0):\sum_{\|n\|=0}^{+\infty}\Big(1-F_{(n)}\Big(\exp\Big(-\Delta\big\|\lambda_{(n)}\big\|\Big)\Big)\Big)<+\infty.$$

2) Якщо $\tau(\lambda)=0$ *і* $\sigma\in\partial G_a\cap(\mathsf{R}_+\setminus\{0\})^p$ *м.н., то*

$$(\forall\varepsilon>0):\sum_{\|n\|=0}^{+\infty}(1-F_{(n)}(e^{(-1+\varepsilon)(\sigma,\lambda_{(n)})}))<+\infty\wedge\sum_{\|n\|=0}^{+\infty}(1-F_{(n)}(e^{(-1-\varepsilon)(\sigma,\lambda_{(n)})}))=+\infty,$$

де $F_{(n)}(x):=P\{\omega:|f_{(n)}(\omega)|<x\},\ x\in\mathsf{R},(n)\in\mathsf{Z}_+^p$ *– функція розподілу* $|f_{(n)}(\omega)|$, ∂G_a *– множина спряжених абсцис збіжності випадкового ряду Діріхле* F_ω.

Ключові слова: *кратні ряди Діріхле, абсциса збіжності.*

Вступ. Основні поняття

Нехай $\Lambda^p=(\lambda_{(n)})_{n\in\mathsf{Z}_+^p}$, де $\lambda_{(n)}=(\lambda_{n_1}^{(1)},\ldots,\lambda_{n_p}^{(p)})\in\mathsf{R}_+^p=[0,+\infty)^p$, $(n)=(n_1,\ldots,n_p)\in\mathsf{Z}_+^p$, $\mathsf{Z}_+:=\mathsf{N}\cup\{0\}$, $p\in\mathsf{N}$. У випадку, коли $(\lambda_k^{(j)})_{k\in\mathsf{Z}_+},1\le j\le p$, зростаючі до $+\infty$ послідовності невід'ємних чисел, тобто, $0=\lambda_0^{(j)}<\lambda_k^{(j)}<\lambda_{k+1}^{(j)}\uparrow+\infty\ (1\le k\uparrow+\infty,1\le j\le p)$, використовуємо позначення Λ_+^p. Через $\mathsf{D}^p(\Lambda^p)$ позначимо клас формальних кратних рядів Діріхле вигляду

$$F(s)=\sum_{\|n\|=0}^{\infty}a_{(n)}\exp\{(\lambda_{(n)},s)\},s=(s_1,\ldots,s_p)\in\mathsf{C}^p,s_j=\sigma_j+it_j\ (j\in\{1,\ldots,p\}),\quad(1)$$

таких, що існує $\sigma \in \mathbb{R}^p$ таке, що

$$a_{(n)} \exp(\lambda_{(n)}, \sigma) \to 0 \quad (\|n\| = n_1 + \ldots + n_p \to +\infty), \tag{2}$$

де $(a_{(n)})$ – послідовність комплексних чисел, $(\lambda_{(n)}, s) = \lambda_{n_1}^{(1)} s_1 + \ldots + \lambda_{n_p}^{(p)} s_p$, $(n) = (n_1, n_2, ..., n_p)$.

Для $\sigma \in \overline{\mathbb{R}}^p := [-\infty, +\infty]^p$ позначимо

$\mathbf{\Pi}_\sigma := \{s \in \mathbb{C}^p : \mathrm{Re} s < \sigma\}$, $\Pi_\sigma = \Pi_\sigma^p := \{x \in \mathbb{R}^p : x < \sigma\}$, $\Pi_\sigma^0 = \{x \in \mathbb{R}^p : x \geq \sigma\}$, де $\mathrm{Re} s = (\mathrm{Re} s_1, \ldots, \mathrm{Re} s_p)$, $x = (x_1, \ldots, x_p) < b = (b_1, \ldots, b_p) \Leftrightarrow x_j < b_j$ $(\forall j \in \{1, \ldots, p\})$, а $x \geq b \Leftrightarrow x_j \geq b_j$ $(\forall j \in \{1, \ldots, p\})$.

Області збіжності кратних рядів Діріхле з показниками Λ_+^p досліджувались у статтях [1-9]. У випадку $p = 2$ А.І. Янушаускас ([4]) (у статті [7] відзначається, що загальний випадок класу $\mathrm{D}^p(\Lambda_+^p)$, $p \geq 2$, розглядається цілком подібно) серед іншого довів: *якщо ряд (1) з показниками* Λ_+^p *збіжний в околі точки* $(\sigma_1^0 + it_1^0, ..., \sigma_p^0 + it_p^0) \in \mathbb{C}^p$*, то він збіжний у прямому добуткові півплощин* $\mathbf{\Pi}_{\sigma^0}$*, при цьому збіжність є рівномірною на кожному компакті з цього прямого добутку.* Звідси, маємо такі можливі три ситуації: 1) ряд (1) збіжний для всіх $s = (s_1 \ldots, s_p) \in \mathbb{C}^p$; 2) ряд (1) не збігається у жодній області з $\mathbb{C}^p$; 3) ряд (1) збіжний в області $\mathbf{\Pi}_{\sigma_c}$, $\sigma_c = (\sigma_{c1}, \ldots, \sigma_{cp})$, і кожна з областей вигляду $\mathbf{\Pi}_{\sigma^0}$, $\sigma^0 = (\sigma_1^0, \ldots, \sigma_p^0)$, для якої $\sigma_i^0 > \sigma_{ci}, i \in I$ і $\sigma_j^0 \geq \sigma_{cj}, j \in J$, де $I \coprod J = \{1, ..., p\}$, містить точки, у яких ряд розбіжний. Числа $\sigma_c := (\sigma_{c1}, \ldots, \sigma_{cp})$ називаються [4] спряженими абсцисами збіжності ряду (1).

Подібно у випадку рядів вигляду (1) з показниками Λ_+^p означаються спряжені абсциси $\sigma_a := (\sigma_{a1}, \ldots, \sigma_{ap})$ абсолютної збіжності ряду (1) (див.[2, 9]), бо якщо кратний ряд Діріхле абсолютно збіжний в точці $s^0 \in \mathbb{C}^p$, то він збіжний абсолютно в області $\mathbf{\Pi}_{\sigma^0}$, $\sigma^0 = \mathrm{Re} s^0 = (\mathrm{Re} s_1^0, \ldots, \mathrm{Re} s_p^0)$; зазначимо також, що за ознакою рівномірної збіжності Веєрштраса він також є рівномірно збіжним на $\overline{\Pi}_{\sigma^0}$.

У випадку рядів вигляду (1) з довільними показниками Λ^p поняття спряжених абсцис введемо дещо інакше (у випадку показників Λ_+^p вони збігаються з введеними вище). Отже, нехай

$$G_c = \{x \in \mathbb{R}^p : \text{ряд (1) збіжний в } \mathbf{\Pi}_x\}, \ \mathbf{G}_c = \{z \in \mathbb{C}^p : \mathrm{Re} z \in G_c\},$$

$$G_a = \{x \in \mathbb{R}^p : \text{ряд (1) абсолютно збіжний в } \mathbf{\Pi}_x\},$$

$$\mathbf{G}_a = \{z \in \mathbb{C}^p : \mathrm{Re} z \in G_a\}$$

$\mathbf{G}_c, \mathbf{G}_a$ відповідно, області збіжності та абсолютної збіжності ряду (1), а G_c, G_a їхні сліди в $\{x \in \mathsf{R}^p : x = Re\, z, z \in \mathsf{C}^p\}$. У випадку послідовності Λ_+^p область існування максимального члена визначається ([7]) як множина тих $\sigma \in \mathsf{R}^p$, що

$$\mu(\sigma, F) = \mu(\sigma_1, \ldots, \sigma_p, F) = \max\{|a_{(n)}| \exp(\lambda_{(n)}, \sigma) : (n) \in \mathsf{Z}_+^p\} < +\infty. \quad (3)$$

В загальному, область існування максимального члена G_μ визначимо як внутрішність множини тих $\sigma \in \mathsf{R}^p$, для яких виконується умова (2).

Зауваження 1.1. У випадку послідовності Λ_+^p обидва означення визначають дві множини з однією і тією ж внутрішністю, яку ми надалі позначатимемо через G_μ. В загальному, очевидно, що умова (3) випливає з умови (2). Навпаки з умови (3) умова (2), взагалі кажучи, не випливає. Справді, припустимо що $p = 2$, $\lambda_k^{(1)} = \lambda_k^{(2)}$ $(k \geq 1)$, $a_{(n_1, n_2)} = 0$ $(n_1 \neq n_2)$, $a_{(k,k)} = 1$ $(k \geq 1)$. Тоді $\mu(\sigma, F) = \mu(\sigma_1, -\sigma_1, F) = 1$, але $a_{(n)} e^{(\sigma, \lambda_n)} \not\to 0$ $(n_1 + n_2) \to +\infty$ при $\sigma = (\sigma_1, -\sigma_1)$.

Множини $\partial G_c, \partial G_a, \partial G_\mu$ – відповідно, гіперповерхні *спряжених абсцис* збіжності, абсолютної збіжності і існування максимального члена ряду (1).

Зауваження 1.2. 1. Якщо $\sigma \notin \overline{G}_c$ (відповідно, $\sigma \notin \overline{G}_a$), то ряд (1) не може бути скрізь збіжним (відповідно, абсолютно збіжним) в Π_σ; подібно, якщо $\sigma \notin \overline{G}_\mu$, то $|a_{(n)}| \exp(\lambda_{(n)}, \sigma) \not\to 0$.

2. Якщо $F \in \mathsf{D}^p(\Lambda^p)$, то $\partial G_\mu \neq \varnothing$ і

$$G_a \subset G_c \subset G_\mu, \quad \partial G_a \subset \partial G_c \subset \partial G_\mu.$$

3. $\sigma \in \partial G_\mu \Rightarrow \Pi_\sigma \subset G_\mu$; $\sigma \in \partial G_a \Rightarrow \Pi_\sigma \subset G_a$; $\sigma \in \partial G_c \Rightarrow \Pi_\sigma \subset G_c$.

В [2] фактично доведено таке твердження.

Твердження 1.1. [2] Якщо $F \in \mathsf{D}^p(\Lambda_+^p)$ і $\tau(\Lambda_+^p) := \overline{\lim\limits_{\|n\| \to \infty}} \dfrac{\ln\|n\|}{\mathsf{P}\|\lambda_{(n)}\|} = 0,$

то

$$\partial G_a = G_1^* := \{\alpha \in \mathsf{R}^p : \overline{\lim_{\|n\| \to +\infty}} \frac{\ln|a_{(n)}| + (\alpha, \lambda_{(n)})}{\|\lambda_{(n)}\|} = 0\},$$

де $\|\lambda_{(n)}\| = \lambda_{n_1}^{(1)} + \ldots + \lambda_{n_p}^{(p)}$.

Зауваження 1.3. У статті [7, Твердження 1.2] у випадку послідовності Λ_+^p фактично доведено, що $\partial G_\mu = G_1^*$, звідки, негайно маємо, що

$$G_\mu = G_1 := \bigcup_{x \in G_1^*} \Pi_x.$$

Зауваження 1.4. В рамках кожного з двох щойно цитованих тверджень $G_a = G_1 := \bigcup_{x\in G_1^*} \Pi_x$ і $G_\mu = G_1$, відповідно. Тому, з умови $\tau(\Lambda_+^p) = 0$ випливає, що $G_a = G_c = G_\mu = G_1$.

З огляду на зауваження 1.3 і 1.4 маємо таке твердження.

Твердження 1.2. Якщо $F \in \mathrm{D}^p(\Lambda_+^p)$ і $\tau(\Lambda_+^p) = 0$, то $G_a = G_c = G_\mu = G_1$ і $\partial G_a = \partial G_c = \partial G_\mu = G_1^*$.

Наступне твердження доведене в [7, Твердження 1.3].

Твердження 1.3 ([7])**.** Нехай $F \in \mathrm{D}^p(\Lambda_+^p)$. Для того, щоб $G_\mu = \mathrm{R}^p$ необхідно і досить, щоб

$$\lim_{\|n\|\to+\infty} \frac{-\ln|a_{(n)}|}{\|\lambda_{(n)}\|} = +\infty.$$

Введемо такі позначення

$$G_0^* := \{\alpha \in \mathrm{R}^p : \underline{\lim}_{\|n\|\to+\infty} \frac{-\ln|a_{(n)}|}{(\alpha, \lambda_{(n)})} = 1\}, \quad G_0 := \bigcup_{x\in G_0^*} \Pi_x,$$

$$\widetilde{G}_0^* = \{\alpha \in \mathrm{R}^p : \overline{\lim}_{\|n\|\to+\infty} \frac{-\ln|a_{(n)}|}{(\alpha, \lambda_{(n)})} = 1\}, \quad \widetilde{G}_0 := \bigcup_{x\in \widetilde{G}_0^*} \Pi.$$

Доведемо такі твердження.

Твердження 1.4. Якщо $F \in \mathrm{D}^p(\Lambda_+^p)$, то

$$G_0^* \cap (\mathrm{R}_+^{p-1} \times (0,+\infty)) \subset G_1^* \cap (\mathrm{R}_+^{p-1} \times (0,+\infty)), \tag{4}$$

$$G_1^* \cap (\mathrm{R}_+ \setminus \{0\})^p \subset G_0^* \cap (\mathrm{R}_+ \setminus \{0\})^p. \tag{5}$$

Доведення твердження 1.4. Доведемо спочатку (4). Нехай $\sigma \in G_0^* \cap (\mathrm{R}_+^{p-1} \times (0,+\infty))$, тобто, таке, що виконується рівність $\underline{\lim}_{\|n\|\to\infty} \ln(1/|a_{(n)}|)/(\sigma, \lambda_{(n)}) = 1$. Тоді

$$\frac{\ln(1/|a_{(n)}|) - (\sigma, \lambda_{(n)})}{\|\lambda_{(n)}\|} = \varepsilon_{(n)} \cdot \frac{(\sigma, \lambda_{(n)})}{\|\lambda_{(n)}\|}, \tag{6}$$

де $\underline{\lim}_{\|n\|\to\infty} \varepsilon_{(n)} = 0$. Але, оскільки $(\sigma, \lambda_{(n)}) \ge 0$ для всіх досить великих $\|n\|$, то

$$0 \le \frac{(\sigma, \lambda_{(n)})}{\|\lambda_{(n)}\|} \le \max\{\sigma_j : 1 \le j \le p\} < +\infty.$$

Звідси,

$$\underline{\lim}_{\|n\|\to\infty} \varepsilon_{(n)} \cdot \frac{(\sigma, \lambda_{(n)})}{\|\lambda_{(n)}\|} = 0.$$

Тому,

$$\varliminf_{\|n\|\to\infty} \frac{\ln(1/|a_{(n)}|)-(\sigma,\lambda_{(n)})}{\left\|\lambda_{(n)}\right\|}=0, \qquad (7)$$

тобто, $\sigma\in G_1^*$ і, отже, $G_0^*\cap(\mathsf{R}_+^{p-1}\times(0,+\infty))\subset G_1^*\cap(\mathsf{R}_+^{p-1}\times(0,+\infty))$, позаяк рівність з означення G_1^* можна подати у вигляді (7).

Припустимо тепер, що $\sigma\in G_1^*\cap(\mathsf{R}_+\setminus\{0\})^p$, тобто, що $\min\{\sigma_j:1\le j\le p\}>0.$ Тоді, з (7) для будь-якого $\varepsilon>0$ і всіх досить великих $\|n\|$ маємо $\ln(1/|a_{(n)}|)>(\sigma,\lambda_{(n)})-\varepsilon\left\|\lambda_{(n)}\right\|$ і, отже,

$$\frac{\ln(1/|a_{(n)}|)}{(\sigma,\lambda_{(n)})}>1-\frac{\varepsilon\left\|\lambda_{(n)}\right\|}{(\sigma,\lambda_{(n)})}\ge 1-\frac{\varepsilon}{\min\{\sigma_j:j\in\{1,\dots,p\}\}},$$

а для деякої підпослідовності $(\widetilde{n})$ такої, що $\|\widetilde{n}\|\to+\infty$, подібно отримуємо

$$\frac{\ln(1/|a_{(\widetilde{n})}|)}{(\sigma,\lambda_{(\widetilde{n})})}<1+\frac{\varepsilon\left\|\lambda_{(\widetilde{n})}\right\|}{(\sigma,\lambda_{(\widetilde{n})})}\le 1+\frac{\varepsilon}{\min\{\sigma_j:j\in\{1,\dots,p\}\}}.$$

З огляду на довільність $\varepsilon>0$ маємо $\sigma\in G_0^*\cap(\mathsf{R}_+\setminus\{0\})^p$, тобто, $G_1^*\cap(\mathsf{R}_+\setminus\{0\})^p\subset G_0^*\cap(\mathsf{R}_+\setminus\{0\})^p$.

□

Твердження 1.5. Якщо $F\in\mathsf{D}^p(\Lambda_+^p)$, то

$$G_1^*\cap(-\infty,0)^p\subset\widetilde{G}_0^*\cap(-\infty,0)^p, \qquad (8)$$

$$\widetilde{G}_0^*\cap((-\infty,0]^{p-1}\times(-\infty,0))\subset G_1^*\cap((-\infty,0]^{p-1}\times(-\infty,0)). \qquad (9)$$

Доведення твердження1.5. Доведемо спочатку (8). Припустимо, що $\sigma=(\sigma_1,...,\sigma_p)\in G_1^*\cap(-\infty,0)^p$, звідки, $\max\{\sigma_j:1\le j\le p\}<0$, тобто, $\min\{-\sigma_j:1\le j\le p\}>0$. Подібно, як і вище, з рівності (7), враховуючи, що $(\sigma,\lambda_{(n)})<0$ отримуємо

$$(\exists k_0)(\forall\|n\|\ge k_0):\frac{\ln(1/|a_{(n)}|)}{(\sigma,\lambda_{(n)})}<1-\frac{\varepsilon\left\|\lambda_{(n)}\right\|}{(\sigma,\lambda_{(n)})}\le 1+\frac{\varepsilon}{\min\{-\sigma_j:j\in\{1,\dots,p\}\}},$$

$$(\exists(\widetilde{n})):\|\widetilde{n}\|\to\infty\wedge\ \frac{\ln(1/|a_{(\widetilde{n})}|)}{(\sigma,\lambda_{(\widetilde{n})})}>1+\frac{\varepsilon\left\|\lambda_{(\widetilde{n})}\right\|}{(\sigma,\lambda_{(\widetilde{n})})}\ge 1-\frac{\varepsilon}{\min\{-\sigma_j:j\in\{1,\dots,p\}\}}.$$

Звідси отримуємо (8).

Нехай тепер $\sigma\in\widetilde{G}_0^*\cap((-\infty,0]^{p-1}\times(-\infty,0))$, тобто, таке, що $(\sigma,\lambda_{(n)})\le 0$ і виконується рівність $\varlimsup\limits_{\|n\|\to\infty}\ln(1/|a_{(n)}|)/(\sigma,\lambda_{(n)})=1.$ Тоді, для будь-якого $\varepsilon>0$ і всіх досить великих $\|n\|$ маємо $\dfrac{\ln(1/|a_{(n)}|)}{(\sigma,\lambda_{(n)})}<1+\varepsilon$ і, отже,

$$\frac{\ln(1/|a_{(n)}|)-(\sigma,\lambda_{(n)})}{\|\lambda_{(n)}\|}>\frac{\varepsilon(\sigma,\lambda_{(n)})}{\|\lambda_{(n)}\|}\geq\varepsilon\cdot\min\{\sigma_j: j\in\{1,\ldots,p\}\},$$

а для деякої підпослідовності $(\widetilde{n})$ такої, що $\|\widetilde{n}\|\to+\infty$, подібно отримуємо

$$\frac{\ln(1/|a_{(\widetilde{n})}|)-(\sigma,\lambda_{(\widetilde{n})})}{\|\lambda_{(\widetilde{n})}\|}<-\varepsilon\cdot\frac{(\sigma,\lambda_{(\widetilde{n})})}{\|\lambda_{(\widetilde{n})}\|}\leq-\varepsilon\cdot\min\{\sigma_j: j\in\{1,\ldots,p\}\}.$$

Отже, знову отримуємо, що виконується рівність (7). Тому $\sigma\in G_1^*$. □

2. Ряди Діріхле з випадковими коефіцієнтами

У цьому підрозділі розглядаємо ряди Діріхле вигляду

$$F(s)=F_\omega(s)=F(s,\omega)=\sum_{\|n\|=0}^{+\infty}f_{(n)}(\omega)\exp\{(\lambda_{(n)},s)\},\qquad(10)$$

де $(f_{(n)}(\omega))$ – послідовність випадкових величин $f_{(n)}:\Omega\to\mathbb{C}$ на ймовірнісному просторі $(\Omega,\mathcal{A},P)$, а $\Lambda_+^p=(\lambda_{(n)})_{n\in\mathbb{Z}_+^p}$ така як і вище векторна послідовність. Через $\mathcal{D}^p(\Lambda_+^p)$ позначимо клас рядів Діріхле вигляду (10) таких, що $F_{\omega'}\in\mathcal{D}^p(\Lambda_+^p)$ м.н. (майже напевно) за $\omega'\in\Omega$. Нижче вживатимемо позначення $G_a=G_a(F_\omega), G_\mu=G_\mu(F_\omega)$. Скрізь у цьому підрозділі також вважатимемо, що виконується умова

$$\tau(\Lambda_+^p):=\overline{\lim_{\|n\|\to\infty}}\frac{\ln\|n\|}{\|\lambda_{(n)}\|}=0.$$

Тоді, за твердженням 1, $\partial G_a=\partial G_c=\partial G_\mu=G_1^*$, а за твердженням 1 $G_1^*\cap(\mathbb{R}_+\setminus\{0\})^p\subset G_0^*\cap(\mathbb{R}_+\setminus\{0\})^p$. Власне, зокрема, якщо $\sigma\in\partial G_a\cap(\mathbb{R}_+\setminus\{0\})^p$, то

$$\underline{\lim_{\|n\|\to\infty}}\frac{-\ln|f_{(n)}(\omega)|}{(\sigma,\lambda_{(n)})}=1,$$

а також, за твердженням 1.5 $G_1^*\cap(-\infty,0)^p\subset\widetilde{G}_0^*\cap(-\infty,0)^p$, зокрема, якщо $\sigma\in\partial G_a\cap(-\infty,0)^p$, то

$$\overline{\lim_{\|n\|\to\infty}}\frac{-\ln|f_{(n)}(\omega)|}{(\sigma,\lambda_{(n)})}=1.$$

Зазначимо, що спряжені абсциси збіжності кратних рядів Діріхле з монотонними показниками досліджувались в [8, 9]. Абсциси збіжності рядів Діріхле з невід’ємними порказниками були об’єктом дослідження в [10-12]. Вкажемо також на статтю [13], у якій досліджувались абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими коефіцієнтами і показниками.

Наступні твердження з теореми 2 є аналогами відповідних тверджень, встановлених для рядів з випадковими коефіцієнтами в [14, 15], а для рядів Діріхле з випадковими показниками в [16-18].

Теорема 1. Нехай $F \in \mathrm{D}^p(\Lambda^p)$. Припустимо, що $(|f_{(n)}(\omega)|)$ – послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу $F_{(n)}(x) := P\{\omega : |f_{(n)}(\omega)| < x\}$, $x \in \mathrm{R}$, $(n) \in \mathrm{Z}_+^p$. Виконуються наступні твердження:

a) Якщо $\sigma \in \partial G_a \cap (\mathrm{R}_+ \setminus \{0\})^p$ м.н., то

$$(\forall \varepsilon > 0): \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} (1 - F_{(n)}(e^{(-1+\varepsilon)(\sigma,\lambda_{(n)})})) < +\infty \wedge \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} (1 - F_{(n)}(e^{(-1-\varepsilon)(\sigma,\lambda_{(n)})})) = +\infty;$$

b) Якщо $\sigma \in \partial G_a \cap (-\infty, 0)^p$ м.н., то

$$(\forall \varepsilon > 0): \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} (1 - F_{(n)}(e^{(-1-\varepsilon)(\sigma,\lambda_{(n)})})) < +\infty \wedge \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} (1 - F_{(n)}(e^{(-1+\varepsilon)(\sigma,\lambda_{(n)})})) = +\infty;$$

c) Для того, щоб $G_a = \mathrm{R}^p$ м.н. необхідно і досить, щоб

$$(\forall \Delta > 0): \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} (1 - F_{(n)}(\exp(-\Delta \|\lambda_{(n)}\|))) < +\infty.$$

Доведення теореми 1. **a)** За умовою $(\exists B \in \mathrm{A}, P(B) = 1)(\forall \omega \in B)$:

$$\overline{\lim_{\|n\| \to +\infty}} \frac{\ln |f_{(n)}(\omega)|}{(\sigma, \lambda_{(n)})} = -1.$$

За означенням верхньої границі, враховуючи, що $(\sigma, \lambda_{(n)}) \geq 0$ для всіх досить великих $\|n\|$, маємо

$$(\forall \omega \in B)(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^*(\omega) \in \mathrm{N})(\forall \|n\| \geq k^*(\omega)): |f_{(n)}(\omega)| < e^{(-1+\varepsilon)(\sigma,\lambda_{(n)})},$$

Позначимо

$$A_{(n)} := \{\omega : |f_{(n)}(\omega)| \geq e^{(-1+\varepsilon)(\sigma,\lambda_{(n)})}\}.$$

Тоді, $B \subset C := \bigcup_{N=0}^{\infty} \bigcap_{\|n\|=N}^{\infty} \overline{A}_{(n)}$ і $P(C) = 1$; C – подія, яка полягає в тому, що "серед подій послідовності $(A_{(n)})$ відбувається скінченна їх кількість". З попарної незалежності випадкових величин $(|f_{(n)}(\omega)|)$ випливає попарна незалежність подій $(A_{(n)})$, тому, за уточненою другою частиною леми Бореля-Кантелі (див. [19, 20], [21, p.84])

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_{(n)}) < +\infty.$$

Залишається зауважити, що

$$P(A_{(n)}) = 1 - P(\overline{A}_{(n)}) = 1 - F_{(n)}(e^{(-1+\varepsilon)(\sigma,\lambda_{(n)})}).$$

Далі, для кожного $\omega \in B$ існує послідовність $m_k \to +\infty$ така, що при $\|n\| = m_k$

$$\ln|f_{(n)}(\omega)| > (-1-\varepsilon)(\sigma, \lambda_{(n)}).$$

Звідси, $\omega \in \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{\|n\|=N} A_{(n)}^1 := C^1$, де $A_{(n)}^1 = \{\omega : |f_{(n)}(\omega)| > e^{(-1-\varepsilon)(\sigma, \lambda_{(n)})}\}$. Тоді, $B \subset C^1$ і, отже, $P(C^1) = 1$. C^1 – подія, яка полягає в тому, що "серед подій послідовності $(A_{(n)}^1)$ відбувається нескінченна їх кількість". Якщо би при цьому

$$\sum_{\|n\|=0}^{+\infty} P(A_{(n)}^1) < +\infty,$$

то за першою частиною леми Бореля-Кантелі ми би отримали, що з ймовірністю, яка дорівнює одиниці, серед подій послідовності $(A_{(n)}^1)$ відбувається скінченна їх кількість, тобто, $P(\overline{C}^1) = 1$. Звідси, $P(C^1) = 0$ – суперечність, яка й доводить, що

$$\sum_{\|n\|=0}^{+\infty} (1 - F_{(n)}(e^{(-1-\varepsilon)(\sigma, \lambda_{(n)})})) \geq \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} (1 - F_{(n)}(e^{(-1-\varepsilon)(\sigma, \lambda_{(n)})} + 0)) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} P(A_{(n)}^1) = +\infty.$$

b) За умовою $(\exists B \in \mathrm{A}, P(B) = 1)(\forall \omega \in B)$:

$$\varlimsup_{\|n\|=+\infty} \frac{-\ln|f_{(n)}(\omega)|}{(\sigma, \lambda_{(n)})} = 1.$$

За означенням верхньої границі, враховуючи, що $(\sigma, \lambda_{(n)}) \leq 0$ для всіх досить великих $\|n\|$, маємо

$$(\forall \omega \in B)(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^*(\omega) \in \mathrm{N})(\forall \|n\| \geq k^*(\omega)) : |f_{(n)}(\omega)| < e^{(-1-\varepsilon)(\sigma, \lambda_{(n)})},$$

Якщо тепер позначити

$$A_{(n)} := \{\omega : |f_{(n)}(\omega)| \geq e^{(-1+\varepsilon)(\sigma, \lambda_{(n)})}\},$$

то, $B \subset C := \bigcup_{N=0}^{\infty} \bigcap_{\|n\|=N}^{\infty} \overline{A}_{(n)}$ і $P(C) = 1$.

Подібно, як і вище у доведенні п. **a)**, для кожного $\omega \in B$ існує послідовність $m_k \to +\infty$ така, що при $\|n\| = m_k$

$$\ln|f_{(n)}(\omega)| > (-1+\varepsilon)(\sigma, \lambda_{(n)}).$$

Звідси, $B \subset \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{\|n\|=N} A_{(n)}^1 := C^1$, де $A_{(n)}^1 = \{\omega : |f_{(n)}(\omega)| > e^{(-1+\varepsilon)(\sigma, \lambda_{(n)})}\}$. Тоді, знову $P(C^1) = 1$.

Дослівне повторенням міркувань з доведення попереднього п. **a)** дає

$$\sum_{\|n\|=0}^{+\infty} P(A_{(n)}) < +\infty \wedge \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} P(A_{(n)}^1) = +\infty,$$

звідки вже елементарно отримуємо потрібний висновок.
с) За твердженнями 1.3 і 1.2,

$$G_a = \mathrm{R}^p \text{ м.н. } \Leftrightarrow \alpha_0^*(\omega) := \lim_{\|n\|\to+\infty} \frac{-\ln|f_{(n)}(\omega)|}{\|\lambda_{(n)}\|} = +\infty \text{ м.н.}$$

Позначимо $A_{(n)} = \{\omega : |f_{(n)}(\omega)| \ge \exp(-\Delta\|\lambda_{(n)}\|)\}$. Оскільки,

$$\alpha_0^*(\omega) = +\infty \Leftrightarrow (\forall\Delta > 0)(\exists k_0(\omega))(\forall n, \|n\| \ge k_0(\omega)) : -\ln|f_{(n)}(\omega)| > \Delta\|\lambda_{(n)}\|,$$

то, як і вище, $P(C) = 1$ для $C = \bigcup_{N=0}^{\infty}\bigcap_{\|n\|=N}^{\infty}\overline{A}_{(n)}$. Застосування уточненої другої частини леми Бореля-Кантелі дає $\sum P(A_{(n)}) < +\infty$, звідки,

$$\sum_{\|n\|=0}^{+\infty}(1 - F(\exp(-\Delta\|\lambda_{(n)}\|))) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} P(A_{(n)}) < +\infty.$$

Тепер навпаки. Зберігаючи позначення, зі збіжності ряду $\sum P(A_{(n)}) < +\infty$ за першою частиною леми Бореля-Кантелі отримаємо, що серед подій $(A_{(n)})$ з ймовірністю, що дорівнює одиниці виконується лише скінченна кількість подій. Власне, для кожного $\Delta > 0$ існує $B = B(\Delta), P(B) = 1$, таке, що для всіх $\omega \in B$ знайдеться $k_0(\omega)$ таке, що для кожного $n, \|n\| \ge k_0(\omega)$ виконується $-\ln|f_{(n)}(\omega)| > \Delta\|\lambda_{(n)}\|$, звідки

$$(\forall\omega \in B(\Delta)) : \varliminf_{\|n\|=+\infty} \frac{-\ln|f_{(n)}|}{\|\lambda_{(n)}\|} \ge \Delta. \tag{11}$$

Виберемо тепер послідовність $\Delta_k = k \quad k \ge 1$. За доведеним, для кожного $k \ge 1$ існує $B(\Delta_k), P(B(\Delta_k)) = 1$, таке, що виконується (11) з $\Delta = k$. Тоді, для кожного $\omega \in B_0 = \bigcap_{k=1}^{+\infty} B(\Delta_k)$ виконується

$$(\forall k \ge 1) : \varliminf_{\|n\|=+\infty} \frac{-\ln|f_{(n)}|}{\|\lambda_{(n)}\|} \ge k.$$

Останнє означає, що $\alpha_0^*(\omega) = +\infty$ для всіх $\omega \in B_0$. Залишається зауважити, що з того, що $P(B(\Delta_k)) = 1$ для всіх $k \ge 1$, випливає, що $P(B_0) = 0$.

Література

1. Громов В.П. Кратные ряды Дирихле / В.П. Громов // Сиб. матем. журн. – 1969. – Т. 10, 3. – С. 522-536.
2. Громов В.П. К теории кратных рядов Дирихле / В.П. Громов // Изв. АН АрмССР. Математика. – 1970. – Т. 5, 5. – С. 449-457.
3. Громов В.П. К теории кратных рядов Дирихле / В.П. Громов // Изв. АН АрмССР. Математика. – 1972. – Т. 7, 2. – С. 90-103.
4. Янушаускас А.И. Двойные ряды Дирихле / А.И. Янушаускас // Лит. матем. сб. – 1978. – Т. 13, 3. – С. 201-211.

5. Янушаускас А.И. Свойства сопряженных абсцисс сходимости двойных рядов Дирихле / А.И. Янушаускас // Лит. матем. сб. – 1979. – Т. 14, 1. – С. 213-228.
6. Задорожна О.Ю. Про спряжені абсциси подвійного ряду Діріхле / О.Ю. Задорожна, О.М. Мулява // Матем. студії.– 2007. – Т. 28, 1. – С. 29-35.
7. Задорожна О.Ю. Про спряжені абсциси збіжності кратного ряду Діріхле / О.Ю. Задорожна, О.Б. Скасків // Карпатські математичні публікації / Carpathian Mathematical Publications. – 2009. – Т.1, 2. – С. 152-160.
8. Задорожна О.Ю. Про області збіжності випадкових подвійних рядів Діріхле / О.Ю. Задорожна, О.Б. Скасків // Матем.Студії. – 2009. – Т.32, 1. – С. 81-86.
9. Skaskiv O.B. On domains of convergence of multiple random Dirichlet series / O.B. Skaskiv, O.Yu. Zadorozhna // Mat. Stud. – 2011. – V.36, 1. – P. 51-57.
10. Мулява О.М. Про абсцису збіжності ряду Діріхле / О.М. Мулява // Мат. студії. – 1998. – Т.9, 2. – С. 171-176.
11. Задорожна О.Ю. Елементарні зауваження про абсциси збіжності інтегралів Лапласа-Стілт'єса / О.Ю. Задорожна, О.Б. Скасків // Буковинський матем. журн. – 2013. – Т.1, 3-4. – С. 45-50.
12. Скасків О.Б. Асимптотичні оцінки додатних інтегралів та цілі функції / О.Б. Скасків, А.І. Бандура. – Львів–Івано-Франківськ: пп. Голіней, 2015. – 108 с. https://www.researchgate.net/publication/ 303922060
13. Скасків О.Б. Абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими показниками / О.Б. Скасків, Н.Ю. Стасів // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2017. – Вип. 84. – С. 76-91.
14. Shapovalovska L.O. On the radius of convergence of random gap power series / L.O. Shapovalovska, O.B. Skaskiv // Int. Journal of Math. Analysis. – 2015. – V.9, 38. – P. 1889-1893. http://dx.doi.org/10.12988/ ijma.2015.53115
15. Скасків О.Б. Про абсциси збіжності випадкових рядів Діріхле / О.Б. Скасків, Л.О. Шаповаловська // Буковинський матем. журн. – 2015. – Т.3, 1. – С. 110-114.
16. Kuryliak A.O. On the abscissas of convergence of Dirichlet series with random pairwise independent exponents / A.O. Kuryliak, O.B. Skaskiv, O.Yu. Stasiv // ArXiv:1703.03280v1[math.CV] 12 Mar 2017. – 12 p.
17. Kuryliak A.O. On the convergence of Dirichlet series with random exponents / A.O. Kuryliak, O.B. Skaskiv, O.Yu. Stasiv // Int. Journal of Appl. Math. – 2017. – V. 30, 3. – P. 229-238.
18. Куриляк А.О. Про абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими показниками і коефіцієнтами / А.О. Куриляк, О.Б. Скасків, Н.Ю. Стасів // Буковинський матем. журн. – 2017. – Т.5, 3-4. – С.90-97.
19. Erdős P. On Cantor's series with convergent $\sum 1/q_n$ / P. Erdős A., Rényi //

Ann. Univ. Sci. Budapest Eőtvős. Sect. Math. – 1959. – V.2. – P. 93-109.
20. Мартикайнен А.И. О лемме Бореля-Кантелли / А.И. Мартикайнен, В.В. Петров // Записки научн. сем. Ленинград. отдел. мат. инст. Стеклова. – 1990. – Т.184. – С. 200-207 (English transl. in: J. Math. Sci., 1994, **63**, 540-544).
21. Billingsley P. Probability and measure / P. Billingsley. – New York: Wiley, 1986.

Стаття надійшла до редакційної колегії 13.06.2018 р.
*Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором **Загороднюком А.В.**, д.ф.-м.н., професором **Чижиковим І.Е.** (м. Львів)*

ABSCISSAS OF THE CONVERGENCE OF MULTIPLE RANDOM DIRICHLET SERIES

A. O. Kuryliak, O. B. Skaskiv, N. Yu. Stasiv
Ivan Franko National University of Lviv;
79001, Lviv, Universytetska str., 1;
e-mails: andriykurylyak@gmail.com, olskask@gmail.com, n-stas@ukr.net

Let $F_\omega(s)=\sum_{\|n\|=0}^{\infty} f_{(n)}(\omega)\exp\{(\lambda_{(n)},s)\}$, *where the exponets* $\lambda_{(n)}=(\lambda_{n_1}^{(1)},\ldots,\lambda_{n_p}^{(p)})\in \mathbb{R}_+^p=[0,+\infty)^p$, $(n)=(n_1,\ldots,n_p)\in \mathbb{Z}_+^p$, $\mathbb{Z}_+:=\mathbb{N}\cup\{0\}$, $p\in\mathbb{N}$, $\|n\|=n_1+\ldots+n_p$, *and the coefficients* $(f_n(\omega))$ *is pairwise independent random complex variables. In the paper, in particular, are proved following statements: 1) If* $\tau(\Lambda):=\overline{\lim}_{\|n\|\to+\infty}\ln\|n\|/\|\lambda_{(n)}\|=0$, *then in order that a Dirichlet series is convergent a.e. in the whole space* $\mathbb{C}^p$ *is necessary and sufficient that*

$$(\forall\Delta>0):\sum_{\|n\|=0}^{+\infty}(1-F_{(n)}(\exp(-\Delta\|\lambda_{(n)}\|)))<+\infty.$$

2) If $\tau(\Lambda)=0$ *and* $\sigma\in\partial G_a\cap(\mathbb{R}_+\setminus\{0\})^p$ *a.e., then*

$$(\forall\varepsilon>0):\sum_{\|n\|=0}^{+\infty}(1-F_{(n)}(e^{(-1+\varepsilon)(\sigma,\lambda_{(n)})}))<+\infty\wedge\sum_{\|n\|=0}^{+\infty}(1-F_{(n)}(e^{(-1-\varepsilon)(\sigma,\lambda_{(n)})}))=+\infty,$$

where $F_n(x):=P\{\omega:|f_{(n)}(\omega)|<x\},\ x\in\mathbb{R},\ (n)\in\mathbb{Z}_+^p$ *is the distribution function of* $|f_{(n)}(\omega)|$, ∂G_a *is the set of conjugate abscissas of absolute convergence of the random Dirichlet series* F_ω.

Key words: *multiple Dirichlet series, abscissas of the convergence.*