

## МАТЕМАТИЧНЕ МИСЛЕННЯ – ПРЕДМЕТ АКТУАЛЬНИХ ПСИХОЛОГІЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

**Л.А.Мойсеєнко**

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу,  
м. Фвано-Франківськ, вул. Карпатська 15,  
тел. +380(3422) 4-22-64, e-mail: [pubic@nung.edu.ua](mailto:pubic@nung.edu.ua).*

*В статті виділяються специфічні прояви мислення математика, що пов'язані із застосуванням математичної символіки, формалізованою формою досліджуваних процесів, паралельним існуванням аксіоматичного і конструктивного методів побудови математичних теорій, наявністю алгоритмів розв'язування багатьох математичних задач. Аналіз психологічних досліджень математичного мислення дає право стверджувати, що вони є розрізненими і, як наслідок, не створена цілісна характеристика психології математичного мислення, не досліджено його процесуально-динамічний аспект, не з'ясовані особливості пошукового процесу при розв'язуванні творчих математичних завдань.*

**Ключові слова:** *творче мислення, математичне мислення, мисленнева стратегія, розуміння, прогнозування, апробація, інтуїція, стиль математичного мислення.*

**Математична діяльність як стимул наукових досліджень.** Зміст математичної діяльності можна окреслити як вивчення правил обчислення; дослідження геометричних образів, функцій; з'ясування сутності імовірнісних подій; дослідження дій, спрямованих на граничні переходи і т.д. Але таке представлення математичної діяльності не описує її сутності, а лише вказує на її напрямки. Водночас, зміст біологічної, фізичної, хімічної діяльності можна окреслити тими явищами природи, що вивчають ці науки, не вдаючись до перерахування гілок їх розвитку, для математичної діяльності не існує явищ природи, що були б об'єктом лише її вивчення.

Загально визнаним є той факт, що математика є значно більше ніж просто наука, бо вона є мовою різних наук. Вона стала не лише знаряддям кількісних розрахунків, як було при її зародженні, але і, як зауважує відомий сучасний математик Б.В.Гнеденко, “... методом точного дослідження і формулюванням понять і завдань” [1, с. 3]. Математика як метод пізнання фізичного світу володіє виключною потужністю та ефективністю. Математиці вдалося внести поправки в те, що можна було називати ілюзіями, відкривати фізичні явища, що повністю не сприймалися людиною. Математичний результат володіє тією властивістю, що його можна застосовувати не лише при вивченні якогось певного явища чи процесу, а може бути використаним і у багатьох інших, фізична природа яких принципово відрізняється від тих, що раніше розглядалися. “Хоч

математика є чисто людським творінням, вона відкрила нам доступ до деяких таємниць природи, чим дозволила досягти успіхів, що перевершили всі сподівання. Для думаючого вченого математичний опис завжди був невичерпним джерелом здивування, яке породжено тим, що природа виявляє таку високу міру відповідності математичним формулам” [2, с. 255]. Таким чином, математика є відносно самостійним соціальним і культурним феноменом.

Саме цим пояснюється виключна увага науковців до математичної діяльності. Тепер вона більше не ототожнюється лише з обчисленням, вона стала також і особливим методом міркувань. Математики всіх часів цікавились не лише розв’язанням конкретних задач і побудовою математичних теорій. Вони ставили і по-своєму розв’язували питання про те, яким чином наука, що не має прямих зв’язків з фізикою, хімією, біологією, економікою, технікою, застосовується з однаковою успіхом у всіх цих галузях знань; якими є критерії, що відрізняють природничу дисципліну від математичної; як виникають математичні проблеми; що є критерієм життєвості математичних теорій; як відбуваються пошукові процеси при розв’язанні математичних проблем, і т.п.

Однак вивчення математичного процесу не вичерпується лише підходом “зсередини”, з позиції самих математиків, що обумовлено їх професійною діяльністю (хоч такий підхід найбільше поширений). Можливий інший підхід – “зовнішній”. Він розглядає математичну діяльність як відтворюючу, при цьому спирається на загальні концептуальні уявлення про математику, на раціональні реконструкції історії математики. Такий підхід, наприклад, може бути здійснений на стику декількох дисциплін: філософії, історії математики, психології [3]. В межах цього підходу не лише описують математичну діяльність, але й ефективно навчають такій діяльності.

Розгляд будь-якого явища можливий у тому випадку, коли його вдається вичленити з навколишнього середовища. Виходячи з цього, вивчення математики ззовні можливе при вичлененні її та її зв’язків із наукового, культурного контексту, в які вона вплетена. Це вимагає чіткого окреслення її сутності: сукупності деяких абстрактних форм, що включені до діяльності специфічного типу і функціонують у ній, а не є побічним продуктом на зразок форми вираження змістовного знання.

Норми математики зафіксовані в категоріальних принципах і логічних нормах. “Вихідні математичні ідеалізації відрізняються від фізичних абстракцій лише тим, що вони відносяться не до світу досвіду, а до світу відношень, що проявляються через діяльність. Вони відображають категоріальні підрозділи і мають ніяк не менше відношення до реальності, ніж закони фізики.” [4, с. 98]. Це дає підстави вичленити основні особливості математичної діяльності (рис. 1.1).



Рис. 1.1. Основні особливості математичної діяльності

Формалізація – це перша визначальна особливість математики. Основний критерій, що відрізняє природничу дисципліну від математики, полягає в характері галузі дослідження, що властива даній науці. Кожна природнича наука визначається матеріальною специфікою свого предмета, реальними рисами тієї частини дійсності, яку вивчає. До речі, саме так визначає свій предмет і психологія. Явищ природи, які б були об'єктом вивчення математики, але не відносились би до явищ фізичних, хімічних, біологічних, соціальних і т.п., не існує. Не наполягаючи на субстанційному існуванні математичних об'єктів, ми можемо говорити про їх реальну значущість.

Один і той самий предмет може досліджуватися різними методами, в тому числі і математичними, але, змінюючи методи, ми завжди залишаємося в межах даної природничої науки, бо для неї реальний предмет, а не метод дослідження, складає основну специфічну рису. Визначальною ж ознакою будь-якої математичної дисципліни, завжди є певний формальний метод, що поширюється на різні матеріальні системи, а тому має різні практичні застосування. У свій час видатний математик М.І.Лобачевський зауважив: “Немає жодної галузі математики, якою б абстрактною вона не була, котра коли-небудь не виявиться застосованою до явищ дійсного світу” [5, с. 21]. Формальні структурні властивості (кількісні співвідношення і просторові форми), в яких існують певні реальні явища, а не їх природа, вирішують чи можна ці явища дослідити тим чи іншим математичним методом.

Абстрактність понять математики створює широкі можливості використання мови символів. Тому другою особливістю математики є наявність знакової символіки. Математичні символи є матеріалізованим утіленням відповідних математичних понять. Математична символіка дає можливість записувати в компактній формі поняття, характеристики, їх властивості. Найзнайоміша форма, в якій наше духовне життя виявляє свою символічну функцію (представлення у знаках) – це мова. По відношенню до математики всі мови вважаються чимось зовнішнім, бо вербально виражені закономірності переводяться на мову математичних знаків. Математичні поняття, символи здатні прижитись у будь-якій мові. “Математика найекономніша у словах. Вона може обійтись навіть зовсім без слів. Не існують для неї мовні перешкоди, бо її мова, як мова музики, зрозуміла для всіх людей світу” [Цит. по 6, с. 75]. Окрім того, не всі символи мають мовну природу, наприклад, знаки для окремих чисел, операцій.

Наступною особливістю математики є існування аксіоматичного і конструктивного методів побудови математичних теорій [7]. Історичний хід розвитку математики породив два підходи до її побудови: аксіоматичний (не конструктивний) і конструктивний [8, 9, 10]. Аксіоматичний підхід до останнього часу вважався ідеалом будь-якої науки. Саме наявність “ідеальних понять” (точка, пряма, площина, число, величина і т.п.) дозволяє аксіоматичну побудову математичних теорій. Відсутність таких ідеалізованих понять, наприклад, у психології перешкоджа аксіоматичній побудові. Таким чином, у математиці, на відміну від емпіричних наук, правильність основної частини її положень не піддається експериментальній перевірці. Тому в цій науці панує логічний метод доведення, що опирається на деякі апріорні знання. Апріорні знання особистості відносяться до так званих неявних знань, що є багатопластовим утворенням [11]. Математика, як наука, побудована на міцному фундаменті такого апріорного знання, що носить дослідницький характер. Спочатку формується пласт неявних онтологічних передумов, що відносяться до розуміння світу в цілому (уявлення про тримірність простору, про єдність світу тощо), потім на цьому фундаменті будуються будь-які знання конкретної особи, зокрема і математичні, а вже пізніше формується пласт неявного апріорного знання, що має особливе значення для занять математикою. Таке неявне математичне знання має вигляд неформалізованих у математиці понять (кількість, множина, точка тощо). При цьому варто наголосити, що апріорне математичне знання, хоч і є особистісним, одночасно є й інтерсуб’єктивним [12].

На початку ХХ століття почав активно розповсюджуватися рух за “функціональне мислення” – тобто мислення в термінах змінних і функцій. Характерною рисою математичної процедури в цьому випадку було: наявність змінних; представлення цих змінних через знаки. Математичними прийомами вихідна багатозначність, якою є дійсність, перетворюється у знакові конструкції. Математики перетворюють предмети у символи та схеми символів і досліджують такі схеми. Цей підхід по-

будови математичних теорій називають конструктивним і є шляхом від багатозначності, якою наділені слова, до чистої символіки і він диктується виключно евристичними прагненнями.

Сучасна математика, як зазначає Г.Вейль, є майстерним поєднанням конструктивної й аксіоматичної процедур [13]. За конструктивним підходом математика – це конструкція, в якій аксіоми встановлюють межі області значень тих змінних, що приймають участь у конструкції; за аксіоматичним – математика – це конструкція, що підпорядкована аксіомам і дедукції. “Взаємозв’язок загального з окремим, дедукції з конструктивним підходом, логіки з уявою – саме вони і складають саму суть живої математики” [13, с. 16].

Вітчизняна математична освіта базується на обох підходах. Незалежно від того чи мова йде про середню, вищу математичну чи вищу спеціальну освіту, той, хто її отримує, знайомиться з обома принципами в процесі вивчення математики.

В літературі зустрічається виділення ще однієї особливості: алгоритмічність розв’язання багатьох математичних задач. Тобто, акцентується увага на тому, що для розв’язання певного типу задач існує вказівка про конкретні операції та їх послідовність виконання на шляху до знаходження розв’язку [14].

Повертаючись до того, що математика є мовою різних наук, варто наголосити, що математизація знань є природним процесом, який дозволяє зекономити засоби на вирішення різних проблем та час на їх дослідження. Математика, не будучи виключенням із усіх областей пізнання, також дозволяє вивчати явища лише наближено. Але слід мати на увазі, що її висновки логічно абсолютно точні і строгі. Їх наближеність носить не внутрішній характер, а лише пов’язаний з описом реальних явищ.

Вивчення математики “зовні” здійснюється з позицій спостерігача, що не зайнятий безпосередньо математичною діяльністю. Цей погляд, ця позиція спостерігача, його розуміння математики, її описування залежить від того, якою діяльністю зайнятий дослідник. Якщо такий розгляд проводиться з позицій світоглядного осмислення математики, то те уявлення, що виникає, відноситься до галузі філософії математики. Фізик може сприймати математику як мову науки. Соціолога може зацікавити структура математичного колективу, групові відмінності та інтереси, розподіл професійної активності за віком, статтю. Для психолога математична діяльність є об’єктом дослідження пошукового процесу, математичних здібностей, взаємовідносин математиків і т.д.

З точки зору філософії математика, як досконала наукова галузь, володіє власними джерелами проблем, власними методами рішення таких проблем і впорядкування знань, що виникають, здатністю задовольняти зовнішні потреби, що виходять зі сторони інших галузей знань і діяльності. Внутрішні інтереси і проблеми філософії математики пов’язані з осмисленням сутності математичного об’єкта, змісту (природи) доведення, співвідношення логіки і математики і т.п. Адже незви-

чність математичних об'єктів, їх видима відмінність від природних об'єктів, породжує проблему інтерсуб'єктивного статусу математичних об'єктів, а отримання на основі логічних міркувань достовірних наслідків з достовірних даних, спонукає потребу з'ясування причин цього.

Традиційно філософські питання стосовно математичних сутностей, стали внутрішніми, теоретичними питаннями філософії математики, такими, що підтримують її автономне існування, вимагають спеціалізації і є збудниками стійкого інтересу у дослідників. Виникнувши як самостійна сутність, філософія математики набула функції відповідати на запитання, які до неї звернені зі сторони інших галузей знань. Філософія математики отримала ряд прикладних по відношенню до неї проблем, головні з яких, виходили із самої математики.

Саме до таких належать питання, що стосуються математичної творчості. Одним з центральним серед них є питання про місце і роль світоглядних уявлень у творчому процесі математика.

Усе ж, математична діяльність, будучи важливим видом діяльності людини, незважаючи на численні дослідження, що проводились як “ззовні”, так і “зсередини”, не пізнана до належного рівня. Маючи свої конкретні ознаки, як-то оперування формалізованими об'єктами, наявність математичної символіки, алгоритмічність методів розв'язання багатьох математичних проблем, свою двозасадну внутрішню будову (конструктивну й аксіоматичну), математика має здатність прислужитись будь-якій іншій мисленнєвій діяльності. Така багатогранність математичної діяльності ставить численні завдання і перед психологією.

Аналіз психологічних досліджень творчого математичного мислення. “Математика, як найбільш розумова галузь науки, має природну спорідненість з психологією – наукою про розум” [9, с. 5]. Деталізуючи цю думку дослідника математичної творчості Г.Біркгофа, слід наголосити, що саме мислення є найбільш спільним об'єктом для математики і психології. Багато визначних дослідників таких, як Р.Декарт, Г.Лейбніц, В.Вундт, Ж.Адамар, А.Пуанкаре, Г.Гельмгольц, Д.Д.Мордухай-Болтовський та інші внесли значний вклад як у математику, так і в психологію. “Сумнівно, щоб повністю усвідомлювався той факт, що всі логічні побудови набувають цінності лише завдяки психологічному факту очевидності основних аксіом. Але вже одного цього факту досить, щоб переконатись у необхідності психологічних досліджень математичного мислення” [15, с. 27].

Психологічні дослідження творчих математичних процесів – це дослідження процесів, що пов'язані з розв'язанням нестандартних математичних задач, народженням математичних відкриттів, створенням нових математичних теорій. Психологів цікавить процес творчого математичного мислення: зародження і функціонування думки, специфіка оперування математичним матеріалом, особливості суб'єкта, що продукує математичну думку і т.п.

Хоч ця тема дослідження не нова і містить чималі напрацювання, проте існує багато нез'ясованого, незрозумілого психологам у процесах

математичного мислення і творчого математичного мислення, зокрема. Дослідники давно вже відмовились від пошуку “математичної гулі” в мозку людини, але й адекватної моделі творчого математичного процесу не створено також.

Вивчення творчого математичного мислення можна умовно розділити на дві групи: дослідження, що проводились наукознавцями (серед яких багато і математиків) [2, 8, 15, 16, 17, 18, 19, 20] і психологами. Найбільш відомі спроби знайти загальні компоненти математичної творчості стали ідеї, які належать А.Пуанкаре, Д.Пойа, Ж.Адамару, Г.Біркгофу, Н.Бурбакі.

З точки зору А.Пуанкаре, в основі математичної творчості лежить математична інтуїція, що є провідником у міркуваннях і виникає, як результат роботи підсвідомості у вигляді твердого переконання, що даний шлях пошуку результативний. Тобто він заперечує, що живе математичне міркування, яке веде нас від істин до нових істин, могло б бути лише однією логічною схемою [20]. Цей підхід значною мірою був запозичений Ж.Адамаром, що більш детально проаналізував період неусвідомленого міркування над проблемою. Згідно позицій Ж.Адамара, основна ідея винаходу в математиці – це підсвідомий вибір і поєднання існуючих у суб’єкта ідей. При цьому критерієм відбору є естетичні почуття суб’єкта, що надихають його йти певним шляхом [16].

Дещо іншим підходом є підхід Д.Пойа. Він робить акцент не на з’ясуванні послідовності станів ученого-творця, а на знаходженні алгоритму вчинків, дослідженні організації (послідовності) дій пізнаючого суб’єкта. Д.Пойа виходить з того, що відкриття нового в математиці відбувається за тими самими рецептами, що й у природничих науках і вважає, що математичне знання утворюється в результаті правдоподібних міркувань, що нагадують експериментальний метод природничих наук [21].

Н.Бурбакі переносять акцент з аналізу діяльності суб’єкта, чи з нього самого на аналіз норм організації об’єкта дослідження. Для них в основі творчих актів математика лежать певні структури математичних знань [22].

З позицій Г.Біркгофа, істотні аспекти людської психології і поведінки мають структуру дискретних математичних систем. Він вважає, що оскільки “закони думки” піддаються формалізації, то творчий процес можна виразити певною математичною системою [9].

Але, перш за все, для пізнання психологічної сутності творчого математичного мислення необхідно враховувати специфіку математичних міркувань. При цьому слід мати на увазі, що не можна чітко розмежувати мислення на математичне, філософське і т. п. Більш того, як стверджує Г.Вейль “... подібно до самої істини і досвіду, мислення за своїм характером є щось досить однорідне” [13, с. 6]. Усе ж математичний метод ототожнюється з особливим методом міркувань, що містить ряд компонентів (див. рис 1.2).

Математична діяльність немислима без використання таких логічних прийомів, як порівняння, аналіз, синтез, абстрагування, узагальнення. Їх поєднання завжди присутнє в математичному мисленні. Як влучно зауважив математик і філософ Б. Рассел: “Математика і логіка розвивалися останнім часом паралельно; логіка стала математичнішою, а математика – логічнішою. Унаслідок цього тепер стало зовсім неможливо провести лінію поділу між ними; фактично вони стали одним цілим. Вони відрізняються як дитина і доросла людина: логіка – це юність, а математика – зрілий вік логіки... Так багато математичної роботи робиться на межі логіки, так багато в сучасній логіці символічного і формального, що тісний зв’язок логіки й математики очевидний тепер для кожного, хто вивчає ці галузі” [Цит. по 6, с. 157 ].



Рис. 1.2. Складові компоненти математичного мислення

Результатом роботи особи, що працює в галузі математики є доказові міркування, в основі яких лежить логіка. Логічний компонент математичного мислення полягає в утворенні математичних понять і абстракцій; розумінні, запам’ятовуванні і самостійному виведенні загальних висновків за правилами формальної логіки [14, 23 та інші]. Однак неможливо чисто логічно обґрунтувати математичне мислення, оскільки неможливо чисто логічно визначити всі математичні поняття і психологічно неможливо проводити логічні операції без звернення до інтуїції. Зокрема, безсумнівним є незалежність психологічних властивостей аксіом від їх логічних властивостей. Математик, філософ, психолог Д.Д.Мордухай-Болтовський зауважує: “Інтуїція, а не формальна логіка з логічними позначеннями, являє собою ті крила, на яких ми відлітаємо у найвіддаленіші області абстракції” [15, с. 51]. При цьому, автор влучно описує той розум, який базується лише на логіці (точний розум), як такий, що повернутий спиною до свого руху, тому бачить той шлях, який пройшов і не бачить того, який потрібно пройти.

Таким чином, загально визнаним є той факт, що у творчому математичному мисленні поряд із “свідомою логікою” функціонують несвідомлені мисленнєві акти. До таких належать неявні знання та інтуї-



тивні знахідки (догадки). Адже будь-яка людина носить у собі уявлення, які вона ніколи не доводить до повного вербального вираження [12]. У суб'єктів, що розв'язують математичні проблеми, актуалізуються неявні знання, що стосуються математики. Поряд з цим, пошуковий процес супроводжують численні догадки на всіх його етапах, впродовж усіх процесів, що його наповнюють: процесу розуміння, процесу формування гіпотези розв'язку, процесу апробації гіпотези.

Числовий компонент полягає в утворенні числових характеристик та вмінні їх інтерпретувати: умінні з отриманих числових даних виявити певну якісну характеристику. І, навпаки, вмінні перевести ту чи іншу якісну характеристику у правильні числові співвідношення. Просторовий компонент математичного мислення – ще одна його складова. Варто зауважити, що людині досить важко мислити виключно лише за допомогою логічних посилянь. Вона відчуває велике полегшення, коли паралельно до них вдається залучити відповідні геометричні образи. Хоч, з точки зору логіки, використання образів приводить до її погрішностей, бо ті образи, що слугують математику допомогою при впровадженні геометричних інтерпретацій, є часто логічно не дозволеними образами [15]. Особливості просторового компонента у математичному мисленні полягають у розумінні просторових математичних фігур, образів, комплексів і у вмінні ними оперувати.

**Аналіз творчої математичної задачі як моделі творчого математичного процесу.** Аналіз літературних джерел, як уже підкреслювалося, дає підстави стверджувати, що процес мислення можна трактувати, як процес розв'язання задач. З цього приводу К.О.Славська зауважує: “Мислення реально здійснюється як розв'язання задач” [24, с. 210]. Задача як об'єкт сучасних психологічних досліджень є предметом активного вивчення, що ґрунтується на діяльнісному підході. У працях С.Л.Рубінштейна, О.М.Леонтєва, Г.О.Костюка, О.К.Тихомирова, М.Я.Басова і багатьох інших дослідження задачі проводиться із врахуванням як зовнішніх, так і внутрішніх чинників активності суб'єкта, що викликана задачною проблемою.

Частіше за все психологи розглядають математичний мисленнєвий процес як процес розв'язання задач, процес породження і подолання математичної проблеми. Згідно тлумачення математичного словника, математична задача це: “... вимога визначити математичний об'єкт, який задовольняв би задані умови” [25, с. 36]. Таке визначення передбачає, що розв'язати математичну задачу означає знайти таку послідовність загальних положень математики (визначень, аксіом, теорем, правил, законів, формул тощо), застосовуючи які до умови задачі чи до її наслідків (проміжних результатів розв'язання), отримаємо те, що вимагається в задачі – її відповідь.

Розв'язуючи математичну задачу, суб'єкт має справу або із знаходженням алгоритму її розв'язання, або з використанням відомого йому алгоритму до ситуації даної задачі [21]. Суттєвим у процесі розв'язання задачі є акцент на знаходження послідовності мисленнєвих кроків, а не

на визначення готового результату – відповіді (навіть якщо він вірний). “Розв’язання задачі полягає в переведенні її предмета з висхідного стану в потрібний” [26, с. 15] Знайти розв’язок математичної задачі – не означає знайти відповідь.

У психології “творча задача” інколи ототожнюється з проблемною ситуацією і обумовлюється характером перебігу її розв’язання. Тому, серед ознак творчої задачі, можна виділити, по-перше, її новизну для конкретного суб’єкта; по-друге, зміну домінуючих рівнів у процесі розв’язання аж до переходу неусвідомлених рівнів у ранг домінуючих; по-третє, факт “блокування” процесу розв’язання після тривалого нерезультативного пошуку; по-четверте, можливість розв’язувати кількома способами. Таким чином, одна і та ж задача може бути творчою для однієї людини і нетворчою для іншої.

Мисленнєвий процес при розв’язанні нової математичної проблемної ситуації – це процес знаходження алгоритму: процес зведення ситуації до вже відомого алгоритму, або пристосування його до даної задачі. Розв’язати математичну задачу – не означає знайти відповідь. Саме це дає підстави науковцям стверджувати, що математичне мислення, спрямоване на розв’язання задач – це вид творчого мислення.

Незалежно від складності, розв’язання будь-якого математичного завдання має певне значення (математичний ефект). Зміст його певною мірою можна також віднести до специфіки математичної діяльності. Значення математичного результату впливає з його змісту: певного поєднання математичних об’єктів (чисел, алгебраїчних виразів, геометричних фігур, формул тощо) на основі математичних тверджень (означень, аксіом, теорем тощо). Крім того, математичний результат повинен задовольняти різні вимоги, що видозмінюються залежно від галузі математики і бути максимально простим. Вимога максимальної корисності, як це є, наприклад, у техніці, фізиці, до результату математичної творчості не висувається, бо будь-який математичний результат рано чи пізно знаходить своє застосування. На загал математичний результат не оцінюється з точки зору економічної вигідності, шкідливості, хіба що в тих випадках, де подібні питання входять до умови завдання.

Крім того, в літературі зустрічаються аналіз методів розв’язання математичних задач (за аналогією, на основі протиставлень, на основі комбінування, на основі реконструкції), деяких етапів процесу розв’язання (вивчення умови задачі, складання плану розв’язку), деяких складових процесів пошуку розв’язку (розуміння задачі, висування гіпотез), однак, детальної схеми процесу розв’язання математичних задач не розроблено. Не описано і творчий математичний процес як цілісний.

Аналіз авторських результатів дослідження творчого математичного мислення. Ми вивчали творче математичне мислення, аналізуючи процеси розв’язання творчих математичних задач з різними вимогами, акцентуючи увагу на процесуально-динамічному аспекті пошуку розв’язку задач та індивідуальних проявах творчого математичного мислення. Дослідно-експериментальна робота проводилася на базі Івано-

Франківського національного технічного університету нафти й газу протягом 1989-2008 років. Досліджуваними були студенти інженерних спеціальностей (426 осіб) [27]. В кожній експериментальній ситуації діяльність студента зводилась до розв'язання творчої математичної задачі в умовах, що пов'язані із змістом і формою подання задачі. Експериментальна ситуація визначалась завданням експериментатора до тієї чи іншої задачі. Таким чином, розв'язуючи різні математичні задачі, студенти опинялись в різних умовах. Це сприяло продукуванню різних прийомів математичного мислення.

Було підбрано 23 серії задач, так, щоб кожна серія сприяла вивченню певного аспекту математичного мислення. Усього використано 160 задач. Підпорядковуючись загальній меті – сприяти вивченню процесуально-динамічного характеру творчого математичного мислення, кожна з цих серій вносила свій внесок (часом непередбачуваний) у ту складну багатогранну мозаїку, якою є процес розв'язання творчих математичних задач. Кожен з учасників експериментального дослідження розв'язував по 23 задачі (по одній з кожної серії) у передбачуваному експериментальному режимі. Ми прагнули при цьому отримати не менше 20 розв'язків (вірних і ні) кожної задачі.

Основне положення експериментального дослідження полягає в тому, що процес розв'язання творчих задач з математики залежить від двох факторів: 1) змісту задачі; 2) особливостей мисленнєвого процесу суб'єкта, що розв'язує математичну задачу. Тому при вивченні творчого математичного мислення студентів було проаналізовано: 1) процес творчого математичного мислення; 2) індивідуальні прояви у творчому математичному процесі. Для цього ми виділили складові процеси творчого математичного мислення (розуміння, формування гіпотези розв'язку, апробації гіпотез) та склали процесуально-динамічну характеристику кожного з них, проаналізували мисленнєві тенденції і стилі студентів, які розв'язували математичні задачі.

Аналізуючи результати експериментальних даних, можна розділити процес розв'язання математичних задач на три етапи: вивчення умови задачі, формування гіпотези розв'язку та її перевірка. Крім того, у розв'язанні кожної задачі виділяється три процеси: процес розуміння задачі, процес формування гіпотези розв'язку, процес апробації гіпотез. При цьому наголосимо, що мова йде не про три послідовні процеси розв'язання творчих математичних задач. Це швидше всього три процеси, що лише деколи проходять у послідовному порядку. Частіше всього – це три паралельні процеси, що переплітаються один з одним у найрізноманітніших комбінаціях. Опираючись один на одного, вони сприяють розвитку кожного. Усе ж вони мають цілісну характеристику і значущість, що дає змогу говорити про кожного з них як самостійний процес творчої математичної діяльності, який має місце при розв'язанні творчих математичних задач.

Основою процесу розуміння творчої математичної задачі є когнітивний компонент. Розуміння творчих математичних задач проходить

як взаємодія нової математичної інформації (зміст задачі) із суб'єктивною системою математичних знань через її інтерпретацію за допомогою різних складових математичного мислення (числового, символного, просторового). Загальна характеристика процесуально-динамічного змісту розуміння не залежить від класу задач, хоч клас, вид, тип математичної задачі визначає деякі його якісні зміни. Це проявляється у значущості різних складових компонентів творчого математичного мислення.

Процес формування гіпотези розв'язку творчих математичних задач опирається на знання, навички, досвід, які спричинюють появу первинного уявлення про розв'язок у формі абстрактної ідеї або зорового образу. Операційний компонент творчого математичного мислення забезпечує наповнення математичним змістом первинного уявлення. Формуючись впродовж усього процесу розв'язування, гіпотеза розв'язку будується під дією певної суб'єктивної мисленнєвої тенденції (діяти за аналогією, всупереч аналогії, на основі комбінування, чи відразу на основі всіх цих дій). При цьому формування гіпотези розв'язку математичних задач будь-якого класу, опираючись на логічно вивірені мисленнєві дії та на догадки, описується загальною процесуально-динамічною схемою.

Головним психологічним змістом процесу апробації гіпотез математичного мислення є порівняльні дії, спрямовані на співставлення отриманого математичного результату з існуючою суб'єктивною системою математичних знань і умовою та вимогою задачі. Апробаційні дії проводяться впродовж усього пошукового процесу (на всіх етапах розв'язання. Апробація гіпотези розв'язку спрямовується загальною мисленнєвою тенденцією, яка, у свою чергу, через результат апробаційних дій (суб'єктивну впевненість), формується у мисленнєву стратегію.

Результативність творчого математичного мислення досягається як на усвідомленому, так і на неусвідомленому рівнях, які взаємодіючи, доповнюють один одного, переходять один в одного. Неусвідомлені мисленнєві акти (догадки, інсайт) мають різну функціональну значущість, що пов'язана з об'єктом (змістом задачі) та суб'єктом (тим, хто розв'язує задачу) творчого математичного мислення.

Творче математичне мислення регулюється різними мисленнєвими стилями. Якщо в основу диференціювання покласти характер усвідомлених мисленнєвих дій (саморегуляцію пошукового процесу, характер індивідуального контролю, корекції власних мисленнєвих кроків тощо) та місце й роль неусвідомлених мисленнєвих актів у пошуковому процесі, то можна виділити принаймні три математичні стилі: диференційний, інтегральний, диференційно-інтегральний. Мисленнєві стилі є основним регулятивно-особистісним чинником пошукового процесу. При взаємодії суб'єктивної мисленнєвої тенденції та індивідуального мисленнєвого стилю така тенденція, зберігши свою психологічну сутність, набуває певної модифікації, що відповідає конкретному стилю математичного мислення.

Здійснене теоретичне та експериментальне дослідження не вичерпує всіх аспектів творчого математичного мислення. Подальшої розробки потребують такі аспекти як дослідження творчого математичного мислення в генезисі; вивчення відмінностей складових процесів творчого мислення (розуміння, формування задуму, апробації) при розв'язанні математичних і технічних задач; дослідження стилів математичного мислення в онтогенезі; відшукування засобів стимуляції конкретних стилів творчого математичного мислення тощо.

### *Література*

1. Гнеденко Б.В. Математика и научное познание / Гнеденко Б.В. – М.: Знание, 1983. – 64 с.
2. Клайн М. Математика. Поиск истины / Клайн М. – М.: Мир, 1988. – 295 с.
3. Журавлев Г.Е. Системные проблемы развития математической психологии / Журавлев Г.Е. – М.: Наука, 1983. – 288 с.
4. Перминов В.Я. Априорность и реальная значимость исходных представлений математики. // Стили в математике: социокультурная философия математики. – С. Пб.: РХГИ, 1999. – С. 80-100.
5. Лобачевский Н.И. Полное собрание сочинений. – Т.1. – М.-Л.: Гостехиздат, 1946. – 416 с.
6. Про математику і математиків. – К.: Рад.школа, 1981. – 254 с.
7. Марнянський І.А. Аксиоми – для чого вони?/ Марнянський І.А – Київ: Рад. школа, 1986. – 112 с.
8. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии / Клейн Ф. – М.: Наука, 1989. – 456 с.
9. Биркгофф Г. Математика и психология / Биркгофф Г – М.: Сов. радио, 1977.– 96 с.
10. Leblanc M.D., Weber-Russell S. Text integration and mathematical connection: A computer model of arithmetic word problem solving // Cogn. Sci. – 1996. – 20, №3. – P. 357-407
11. Полани М. Личностное знание: на пути к посткритической философии / Полани М.– М.: Прогресс, 1985. – 334 с.
12. Султанова Л.Б. Роль интуиции и неявного знания в формировании стиля математического мышления // Стили в математике: социокультурная философия математики. – С. Пб.: РХГИ, 1999. – С. 66-76.
13. Вейль Г. Математическое мышление / Вейль Г. – М.: Наука, 1989. – 400 с.
14. Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьников / Крутецкий В.А. – М.: Просвещение, 1968. – 432 с.
15. Мордухай-Болтовский Д.Д. Философия, Психология. Математика / Мордухай-Болтовский Д.Д. – М: Серебряные нити, 1998. – 552 с.
16. Адамар Ж. Исследования психологии процесса изобретения в области математики / Адамар Ж. – М.: Соврадио, 1970. – 152 с.

17. Асмус В.Ф. Проблема интуиции в философии и математике / Асмус В.Ф. – М.: Соцэкгиз, 1963. – 312 с.
18. Барабашов А.Г. Будущее математики: методологические аспекты прогнозирования / Барабашов А.Г. – М.: Изд-во МГУ, 1991. – 160 с.
19. Беляев Е.А., Перминов В.Я. Философские и методологические проблемы математики / Беляев Е.А., Перминов В.Я. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. – 217 с.
20. Пуанкаре А. О науке / Пуанкаре А. – М.: Наука, 1990. – 735 с.
21. Пойа Д. Как решать задачу / Пойа Д. – М.: Учпедгиз, 1961. – 207 с.
22. Бурбаки Н. Архитектура математики / Бурбаки Н. – М.: Знание, 1972. – 32 с.
23. Гаушенбах В.В. Поиск решения в задачах математического характера / Гаушенбах В.В. // Психол. журн. – 1996. – Т. 17, № 2. – С. 80-87.
24. Славская К.А. Мысль в действии / Славская К.А. – М.: Политиздат, 1968. – 208 с.
25. Толковый математический словарь. – М.: Рус. яз., 1989. – 244 с.
26. Балл Г.О. Теория учебных задач: Психолого-педагогический аспект / Балл Г.О. – М.: Педагогика, 1990. – 184 с.
27. Мойсеенко Л.А. Психологія творчого математичного мислення / Мойсеенко Л.А. – Івано-Франківськ: Факел, 2003. – 481 с.

*Стаття поступила в редакційну колегію 22.10.2009 р.  
Рекомендовано до друку докт. техн. наук, професором Мойсишиним В.М.*

## MATHEMATICAL THINKING IS A SUBJECT OF PSYCHOLOGICAL STUDY

**L. A. Moysejenko**

*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas  
15, Carpats'ka street, Ivano-Frankivs'k, 76019, Ukraine  
tel. +380(3422) 4-22-64, e-mail: [pubic@nung.edu.ua](mailto:pubic@nung.edu.ua)*

*In the article there have been pointed out the specific manifestations of thinking – mathematics, which is connected with application of mathematical symbolism, formalized model of investigated processes, parallel existence of axiomatic and constructive methods for developing mathematical theories and availability of algorithms for solving many mathematical problems.*

*Psychological study analysis of mathematical thinking gives the right to assert that they are differential (differented) and, as a result, there is no integral psychology characteristic of mathematical thinking; there has not been investigated its procedural-dynamic aspect; there have not been brought to light the peculiarities of searching process in solving creative mathematical problems.*

**Key words:** *creative thinking, mathematical thinking, cognitive strategy, understanding, forecasting, approbation, intuition, mathematical style, creative training.*